

# Mathématiques I

## Préliminaires et objectif du problème

On rappelle que  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et que  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  on note  $\mathbb{C}_n[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$  constitué par les polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On munit l'algèbre  $C([-1, 1], \mathbb{C})$  des fonctions à valeurs complexes continues sur le segment  $[-1, 1]$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  de la convergence uniforme, définie par

$$(\forall f \in C([-1, 1], \mathbb{C})), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|.$$

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est identifié à la fonction polynomiale qu'il induit sur  $[-1, 1]$ .

Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs.

- On dit que cette suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à décroissance rapide si pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  elle est dominée par la suite  $(n^{-k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ , c'est-à-dire si

$$(\forall k \in \mathbb{N}) (\exists M_k \in \mathbb{R}_+) (\forall n \in \mathbb{N}^*), \lambda_n \leq \frac{M_k}{n^k}.$$

On note  $\mathcal{E}_\infty$  l'ensemble des fonctions  $f \in C([-1, 1], \mathbb{C})$  pour lesquelles il existe une suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
- la suite  $(\|f - Q_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  est à décroissance rapide.
- On dit que cette suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à décroissance exponentielle si, pour un certain réel  $r \in ]0, 1[$ , elle est dominée par la suite géométrique  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , c'est-à-dire si

$$(\exists r \in ]0, 1[), (\exists M \in \mathbb{R}_+), (\forall n \in \mathbb{N}), \lambda_n \leq M r^n$$

On note  $\mathcal{E}_{\text{exp}}$  l'ensemble des fonctions  $f \in C([-1, 1], \mathbb{C})$  pour lesquelles il existe une suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
- la suite  $(\|f - Q_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  est à décroissance exponentielle.

# Filière MP

**Remarque :** Une suite à décroissance rapide (resp. exponentielle) converge vers 0 mais n'est pas forcément décroissante.

L'objectif du problème est de montrer, en utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev établies en Partie I, que les fonctions de l'ensemble  $\mathcal{E}_\infty$  sont exactement les fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $[-1, 1]$  et de relier les fonctions  $f$  de l'ensemble  $\mathcal{E}_{\text{exp}}$  aux fonctions  $f$  dont la série de Taylor

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

en tout point  $a \in [-1, 1]$  converge vers  $f(x)$  sur un voisinage de  $a$ .

- Vérifier que si une suite est à décroissance exponentielle alors elle est à décroissance rapide.
- Vérifier que les ensembles  $\mathcal{E}_\infty$  et  $\mathcal{E}_{\text{exp}}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $C([-1, 1], \mathbb{C})$ . Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre ces deux sous-espaces ?
- Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $[-1, 1]$  dont toutes les dérivées sont bornées sur  $[-1, 1]$  par un même réel  $M$ . Montrer que  $f \in \mathcal{E}_{\text{exp}}$ .
  - Donner des exemples de fonctions de  $\mathcal{E}_{\text{exp}}$ .

## Partie I - Polynômes de Tchebychev

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $(\forall x \in [-1, 1]), T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ .

### I.A - Premières propriétés des $T_n$

I.A.1) Montrer que  $T_n$  est une fonction polynomiale à coefficients entiers. Le polynôme associé est encore noté  $T_n$  et s'appelle le  $n$ -ième polynôme de Tchebychev.

I.A.2) Expliciter  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$ .

I.A.3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ .

I.A.4) En déduire la parité, le degré et le coefficient dominant de  $T_n$ .

I.A.5) Écrire un algorithme pour calculer  $T_n(X)$ .

On pourra employer le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé ou un langage naturel non ambigu.

I.A.6) Montrer que, pour tout  $t \in [0, \pi]$ , on a :  $T_n(\cos t) = \cos nt$ .

**I.B - Calcul de normes**

I.B.1) Calculer  $\|T_n\|_\infty$ .

I.B.2) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall u \in \mathbb{R}), |\sin nu| \leq n|\sin u|$ .

I.B.3) En déduire que  $\|T'_n\|_\infty = n^2$ .

**I.C - Encadrement de  $T_n(x)$  sur  $[1, +\infty[$**

I.C.1) Montrer que

$$(\forall r \in \mathbb{R}^*), T_n\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

I.C.2) Soit un réel  $x \in [1, +\infty[$ .

a) Montrer qu'il existe  $r \in \mathbb{R}^*$ , tel que  $x = \frac{r+r^{-1}}{2}$ .

b) En déduire que  $1 \leq T_n(x) \leq \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$ .

**I.D - Équation différentielle vérifiée sur  $\mathbb{R}$  par  $T_n$**

I.D.1) En dérivant l'égalité  $T_n(\cos t) = \cos nt$  valable pour tout réel  $t \in [0, \pi]$ , trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur  $\mathbb{R}$  par  $T_n$ .

I.D.2) Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ . Déduire de la question I.D.1 que

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

Montrer que  $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)$ .

**Partie II - Application des polynômes de Tchebychev à la majoration des polynômes et de leurs dérivées**

On introduit la subdivision  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  du segment  $[-1, 1]$  définie par :

$$\forall j \in [0, n], a_j = \cos\left[\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi\right].$$

Par ailleurs, pour tout  $i \in [0, n]$  on appelle  $E_i = [0, n] \setminus \{i\}$  l'ensemble des entiers naturels autres que  $i$  qui sont inférieurs ou égaux à  $n$ .

Enfin, pour tout  $i \in [0, n]$  on note

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j \in E_i} (X - a_j)}{\prod_{j \in E_i} (a_i - a_j)}$$

le  $i$ -ème polynôme élémentaire de Lagrange associé à la subdivision  $\sigma$ .

**II.A - Majoration d'un polynôme sur  $[1, +\infty[$** 

II.A.1) Résoudre sur  $[-1, 1]$  l'équation  $|T_n(x)| = 1$  et calculer  $T'_n(a_j)$  pour  $j = n$ , pour  $j = 0$  puis pour  $j \in [1, n-1]$ .

II.A.2) Montrer que

$$T_n(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} L_i(X).$$

II.A.3) On suppose que  $x \in [1, +\infty[$ . Montrer que

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n |L_i(x)|.$$

II.A.4) Soit  $P(X)$  un polynôme appartenant à  $\mathbb{C}_n[X]$ . Montrer que

$$(\forall x \in [1, +\infty[), |P(x)| \leq \|P\|_\infty \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n.$$

**II.B - Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur  $[1, +\infty[$** 

II.B.1) On suppose que  $x \in [1, +\infty[$ . Montrer que :

$$(\forall k \in [1, n]), T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n |L_i^{(k)}(x)|.$$

II.B.2) Soit  $P(X)$  un polynôme appartenant à  $\mathbb{C}_n[X]$ . Montrer que :

$$(\forall k \in [1, n]), (\forall x \in [1, +\infty[), |P^{(k)}(x)| \leq \|P\|_\infty T_n^{(k)}(x).$$

**II.C - Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur  $[-1, 1]$** 

Soit  $P \in \mathbb{C}_n(X)$ . On considère un entier  $k \in [1, n]$ .

II.C.1) On pose

$$(\forall \lambda \in [-1, 1]), P_\lambda(X) = P\left(\frac{\lambda + \varepsilon}{2}X + \frac{\lambda - \varepsilon}{2}\right) \text{ avec}$$

$$\varepsilon = 1 \text{ si } \lambda \in [0, 1] \text{ et } \varepsilon = -1 \text{ si } \lambda \in [-1, 0].$$

Montrer que :

$$|P_\lambda^{(k)}(1)| = \left(\frac{|\lambda| + 1}{2}\right)^k |P^{(k)}(\lambda)|.$$

II.C.2) En déduire que  $\|P^{(k)}\|_\infty \leq 2^k T_n^{(k)}(1) \|P\|_\infty$ .

II.C.3) Montrer que :

$$\|P^{(k)}\|_\infty \leq 2^{2k} \frac{k! (n+k)!}{(2k)! (n-k)!} \|P\|_\infty$$

et que, si  $k = 1$ , on a la majoration plus fine  $\|P'\|_\infty \leq 2n^2 \|P\|_\infty$ .

### Partie III - Détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$

On note  $C_{2\pi}$  l'algèbre des fonctions  $2\pi$ -périodiques et continues sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs complexes. On munit  $C_{2\pi}$  de deux normes, la norme quadratique  $N_2$  définie pour  $\varphi \in C_{2\pi}$ , par

$$N_2(\varphi) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \text{ induite par le produit scalaire hermitien :}$$

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi(t)}\psi(t)dt$$

et la norme  $N_\infty$  de la convergence uniforme définie par

$$N_\infty(\varphi) = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |\varphi(t)| .$$

Pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$  on pose  $e_k : t \mapsto e^{ikt}$ . On rappelle que la famille  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormale de l'espace préhilbertien  $(C_{2\pi}, N_2)$  et que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , le  $k$ -ième coefficient de Fourier d'une fonction  $\varphi \in C_{2\pi}$  est le complexe

$$c_k(\varphi) = (e_k | \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)e^{-ikt} dt .$$

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  on note  $\tau_n$  le sous-espace vectoriel de  $C_{2\pi}$  engendré par les fonctions  $e_k$  où  $k \in [-n, n]$  :

$$\tau_n = \text{vect}(e_{-n}, \dots, e_0, \dots, e_n) ; \dim(\tau_n) = 2n + 1 .$$

Soit  $\varphi \in C_{2\pi}$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$S_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^n c_k(\varphi)e_k \text{ le } n\text{-ième polynôme trigonométrique de Fourier de } \varphi .$$

#### III.A - Propriétés liées aux normes $N_2$ et $N_\infty$

III.A.1) On suppose que la série

$$\sum_{n \geq 1} (|c_n(\varphi)| + |c_{-n}(\varphi)|) \text{ converge.}$$

Montrer que la suite  $(S_n(\varphi))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $\varphi$ .

III.A.2) Soit  $\varphi \in C_{2\pi}$  muni de la norme quadratique  $N_2$ . On rappelle que  $S_n(\varphi)$  est la projection orthogonale de  $\varphi$  sur  $\tau_n$ . En déduire que :

$$(\forall \omega \in \tau_n \setminus \{S_n(\varphi)\}) , N_2(\varphi - \omega) > N_2(\varphi - S_n(\varphi)) .$$

III.A.3) On suppose que la fonction  $\varphi \in C_{2\pi}$  est de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$ , avec  $p \geq 1$ . Montrer que :

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^* ) , |c_k(\varphi)| \leq \frac{N_\infty(\varphi^{(p)})}{|k|^p} .$$

### III.B - Étude d'une application linéaire

On rappelle que  $C([-1, 1], \mathbb{C})$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On note  $L$  l'application linéaire qui à toute fonction  $f$  de  $C([-1, 1], \mathbb{C})$ , associe la fonction  $Lf$  de  $C_{2\pi}$  définie par  $\forall t \in \mathbb{R} \quad Lf(t) = f(\cos t)$ .

Montrer que  $L$  est injective et calculer la norme subordonnée  $\|L\|_\infty$  de  $L$  lorsque l'on munit  $C_{2\pi}$  de la norme  $N_\infty$  puis la norme subordonnée  $\|L\|_2$  de  $L$  lorsque l'on munit  $C_{2\pi}$  de la norme  $N_2$ .

### III.C - Propriétés liées aux coefficients de Fourier d'une fonction $Lf$

Dans cette section on considère une fonction  $f$  fixée dans  $C([-1, 1], \mathbb{C})$ .

III.C.1) Vérifier que  $c_{-k}(Lf) = c_k(Lf)$ .

III.C.2) Soit  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$ . Montrer que :

$$(\forall k \geq 2), |c_k(Lf)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f - Q_{k-1}\|_\infty.$$

III.C.3) Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  on pose :

$$(\forall x \in [-1, 1]), U_n(f)(x) = S_n(Lf)(\arccos x).$$

Montrer que :

$$U_n(f) = c_0(Lf) + 2 \sum_{k=1}^n c_k(Lf) T_k.$$

III.C.4) On suppose que la série  $\sum_{k \geq 1} |c_k(Lf)|$  converge. Montrer que :

$$\|f - U_n(f)\|_\infty \leq 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)|.$$

### III.D - Développement en série de Tchebychev d'une fonction $f$ de $\mathcal{E}_\infty$

On suppose dans cette question que  $f$  est une fonction de l'ensemble  $\mathcal{E}_\infty$ .

III.D.1) Montrer que la suite  $(|c_n(Lf)|)_{n \in \mathbb{N}}$  est à décroissance rapide.

III.D.2) Montrer que :

$$(\forall x \in [-1, 1]), f(x) = c_0(Lf) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf) T_n(x)$$

et que la série de fonctions converge normalement sur  $[-1, 1]$ .

III.D.3) En déduire que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[-1, 1]$  et que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}), (\forall x \in [-1, 1]), f^{(k)}(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf) T_n^{(k)}(x)$$

### III.E - Achèvement de la détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$

On suppose dans cette question que  $f$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $[-1, 1]$ .

III.E.1) Montrer que la suite  $(|c_n(Lf)|)_{n \in \mathbb{N}}$  est à décroissance rapide.

III.E.2) En déduire que  $f \in \mathcal{E}_\infty$ .

## Partie IV - Étude de l'ensemble $\mathcal{E}_{\text{exp}}$

### IV.A - Caractérisation des éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_{\text{exp}}$

IV.A.1) Soit  $f$  une fonction de  $C([-1, 1], \mathbb{C})$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a)  $f \in \mathcal{E}_{\text{exp}}$ .

b) La suite  $(|c_n(Lf)|)_{n \in \mathbb{N}}$  est à décroissance exponentielle.

### IV.B - Développement en série de Tchebychev d'une fonction $f$ de $\mathcal{E}_{\text{exp}}$

On suppose dans cette question que  $f$  est une fonction de l'ensemble  $\mathcal{E}_{\text{exp}}$ . Il existe donc un réel  $r \in ]0, 1[$  tel que :

$$(\exists M \in \mathbb{R}_+), (\forall n \in \mathbb{N}), |c_n(Lf)| \leq M r^n.$$

IV.B.1) Justifier le fait que :

$$(\forall x \in [-1, 1]), f(x) = c_0(Lf) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf) T_n(x),$$

que la série de fonctions converge normalement sur  $[-1, 1]$ , que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[-1, 1]$  et que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}), (\forall x \in [-1, 1]), f^{(k)}(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf) T_n^{(k)}(x).$$

IV.B.2) En déduire que

$$(\forall k \in \mathbb{N}), \|f^{(k)}\|_\infty \leq \frac{2M}{1-r} \cdot \frac{k!}{[\lambda(r)]^k}, \text{ avec } \lambda(r) = \frac{(1-r)^2}{4r}.$$

### IV.C - Développement en série de Taylor au voisinage de tout point $a \in [-1, 1]$ d'une fonction $f$ de $\mathcal{E}_{\text{exp}}$

On conserve les mêmes hypothèses qu'à la question précédente pour  $f$ . Soit un point  $a \in [-1, 1]$ .

Montrer que la série de Taylor :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

de  $f$  au point  $a$  converge vers  $f(x)$  sur le voisinage  $[-1, 1] \cap ]a - \lambda(r), a + \lambda(r)[$  du point  $a$ .

#### IV.D - Inclusion stricte entre $\mathcal{E}_{\exp}$ et $\mathcal{E}_{\infty}$

Montrer que la fonction  $f$  définie par

$$(\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}), f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ et } f(0) = 0$$

appartient à  $\mathcal{E}_{\infty}$  mais n'appartient pas à  $\mathcal{E}_{\exp}$ .

#### IV.E - Réciproque partielle concernant la détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$

Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles ou complexes développable en série entière sur un intervalle ouvert  $]-\rho, \rho[$ , avec  $\rho > 1$ . Montrer que la restriction de  $f$  au segment  $[-1, 1]$  appartient à  $\mathcal{E}_{\exp}$ .

---

••• FIN •••

---