

# MATHÉMATIQUES II

$E$  désigne l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne canonique et orienté de sorte que la base canonique, notée  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , soit orthonormale directe.

On a donc pour tout  $x, y$  et  $z$  réels :  $(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Le produit scalaire sera noté :  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

Si  $\mathbf{u}$  est un vecteur non nul élément de  $E$ , on note  $D_{\mathbf{u}}$ , la droite vectorielle de base  $\mathbf{u}$ ,  $P_{\mathbf{u}}$  le plan vectoriel orthogonal à  $D_{\mathbf{u}}$  et  $S_{\mathbf{u}}$  le demi-tour par rapport à  $D_{\mathbf{u}}$  c'est-à-dire la symétrie orthogonale par rapport à  $D_{\mathbf{u}}$  ou encore la rotation vectorielle d'axe  $D_{\mathbf{u}}$  et d'angle de mesure  $\pi$ .

Si  $\theta$  est un nombre réel, on note  $R_{\theta}$  la rotation vectorielle d'axe  $D_{\mathbf{k}}$  orienté dans le sens du vecteur  $\mathbf{k}$  et d'angle de mesure  $\theta$ .

On rappelle qu'une rotation vectorielle de  $E$  ayant  $-1$  comme valeur propre est un demi-tour.

On rappelle également l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

et l'on admet que dans cette inégalité, l'égalité a lieu si et seulement si les deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont colinéaires.

## Partie I - Étude d'un cas particulier

Pour tout  $(x, y, z)$  élément de  $E$ , on pose :  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  et l'on note  $Q_0$  l'ensemble suivant :  $Q_0 = \{(x, y, z) \in E \mid q(x, y, z) = 0\}$ .

### I.A - Une étude de $Q_0$

I.A.1) Déterminer quelques éléments de symétrie de  $Q_0$

I.A.2) Déterminer et dessiner l'intersection de  $Q_0$  avec le plan  $P_j$ .

I.A.3)

a) Démontrer que pour tout  $\theta$  réel :  $R_{\theta}(Q_0) \subset Q_0$ .

b) En déduire que, pour tout  $\theta$  réel,  $Q_0$  est invariant par  $R_{\theta}$  c'est-à-dire :  $R_{\theta}(Q_0) = Q_0$ .

I.A.4) Donner la nature géométrique de  $Q_0$ .

# Filière MP

## I.B - Automorphismes orthogonaux laissant $D_u$ invariant

On note  $K$  l'ensemble des automorphismes orthogonaux de  $E$  qui laissent globalement invariant  $D_k$ , c'est-à-dire :  $K = \{\varphi \in O(E) \mid \varphi(D_k) = D_k\}$

I.B.1) Donner quelques éléments de  $K$ .

I.B.2) Soit  $\varphi$  un élément quelconque de  $K$ .

a) Démontrer que  $k$  est un vecteur propre de  $\varphi$ .

b) Démontrer :  $\varphi(k) \in \{-k, k\}$ .

c) Déterminer l'ensemble  $K^+$  des rotations vectorielles éléments de  $K$ .

I.B.3) On pose  $K^- = \{-r \mid r \in K^+\}$ . Démontrer que  $K = K^+ \cup K^-$ .

## I.C - Automorphismes orthogonaux laissant $Q_0$ invariant

On note  $K_0$  l'ensemble des automorphismes orthogonaux de  $E$  qui laissent globalement invariant  $Q_0$ , c'est-à-dire :  $K_0 = \{\varphi \in O(E) \mid \varphi(Q_0) = Q_0\}$ .

I.C.1) Démontrer que  $K_0$  est un sous-groupe de  $O(E)$ .

I.C.2)

a) Reconnaître, pour tout  $\theta$  réel, l'endomorphisme  $R_\theta \circ S_i$ .

b) Démontrer :  $K^+ \subset K_0$ .

c) Démontrer :  $K \subset K_0$ .

I.C.3) Soit  $\varphi$  un élément quelconque de  $K_0$ .

a) Démontrer que pour tout vecteur  $v$  élément de  $Q_0$  tel que :  $\|v\| = \sqrt{2}$ , l'on a :

$$\langle v | k \rangle^2 = 1.$$

b) On note  $u$  un vecteur quelconque unitaire élément de  $P_k$ .

i) Observer que  $u + k \in Q_0$ , puis démontrer :  $\langle \varphi(u + k) | k \rangle^2 = 1$ .

ii) En faisant intervenir le vecteur  $u - k$ , en déduire :  $\langle \varphi(u) | k \rangle \langle \varphi(k) | k \rangle = 0$

iii) On suppose  $\langle \varphi(k) | k \rangle = 0$  ; démontrer qu'alors  $\varphi(u)$  est colinéaire à  $k$ . Est-ce cohérent ?

iv) En déduire :  $\varphi(P_k) = P_k$ .

I.C.4) Démontrer que  $K_0 = K$ .

**I.D - Composition et invariance**

On pose :  $C = \{\varphi \in O(E) \mid q \circ \varphi = q\}$ .

I.D.1) Démontrer  $C = K$ .

I.D.2)

a) Justifier que  $q$  est une forme quadratique sur  $E$  et donner sa matrice  $M$  dans la base  $(i, j, k)$ .

b) Reconnaître l'endomorphisme  $\sigma$  de matrice  $M$  dans la base  $(i, j, k)$ .

I.D.3) Démontrer que tout élément  $\varphi$  de  $C$  commute avec  $\sigma$  c'est-à-dire vérifie  $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$ .

I.D.4) Soit  $\varphi$  un élément de  $O(E)$  qui commute avec  $\sigma$ . Démontrer que  $k$  est un vecteur propre de  $\varphi$ .

I.D.5) En déduire  $C = \{\varphi \in O(E) \mid \sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma\}$ .

**Partie II - Une généralisation**

On note  $U$  un endomorphisme symétrique de  $E$  et l'on pose pour tout vecteur  $X$  de  $E$  :  $f(X) = \langle X \mid U(X) \rangle$ . Pour tout  $a$  réel, on pose :  $F_a = \{X \in E \mid f(X) = a\}$ . On veut déterminer les endomorphismes  $U$  tels que toutes les surfaces  $F_a$  soient de révolution d'axe  $D_k$  c'est-à-dire tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta(F_a) = F_a \quad (*)$$

**II.A** - Démontrer que  $(*)$  est équivalente à  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f \circ R_\theta = f$ .

**II.B** - On suppose ici :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$ . Démontrer qu'alors  $(*)$  est vérifiée.

**II.C** - On suppose maintenant que  $(*)$  est vérifiée et l'on veut démontrer :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$ .

II.C.1) Déterminer les endomorphismes symétriques  $V$  de  $E$  tels que :

$$\forall X \in E, \langle X \mid V(X) \rangle = 0.$$

II.C.2) Démontrer que si  $V$  et  $V'$  sont des endomorphismes symétriques de  $E$ , il en est de même de  $V - V'$ .

II.C.3) Démontrer que pour tout réel  $\theta$  l'endomorphisme  $R_\theta^{-1} \circ U \circ R_\theta$  est symétrique.

II.C.4) Conclure.

**II.D** - On suppose que  $U$  commute avec toutes les rotations  $R_\theta$ .

II.D.1) Démontrer que  $k$  est un vecteur propre de  $U$ . En déduire :  $U(P_k) \subset P_k$ .

II.D.2) Démontrer que la matrice  $M$  de  $U$  dans la base  $(i, j, k)$  est du type :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

II.D.3) En déduire que  $(*)$  est vérifiée si et seulement si  $M$  s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \text{ Que vaut alors } f(x, y, z) \text{ pour tout } (x, y, z) \text{ élément de } E ?$$

## II.E - Un résultat plus fort

On suppose dans cette section que  $F_1$  est non vide et de révolution d'axe  $D_k$  c'est-à-dire que  $U$  est tel que :

$$\begin{cases} F_1 \neq \emptyset \\ \forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta(F_1) = F_1 \end{cases} \quad (1)$$

et on désigne par  $X$  un vecteur quelconque de  $E$ .

II.E.1) On suppose  $f(X) > 0$  ; démontrer :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f \circ R_\theta(X) = f(X)$ .

II.E.2) On suppose  $f(X) \leq 0$ . On considère alors un vecteur  $X_1$  élément de  $F_1$  et pour tout réel  $t$ , on pose  $g(t) = f(X + tX_1)$ .

a) Démontrer que  $g$  est une fonction polynômiale de degré 2 que l'on précisera. En déduire qu'il existe un réel  $t_0$  tel que :

$$\forall t \in [t_0; +\infty[, g(t) > 0.$$

b) Démontrer pour tout réel  $\theta$  :

$$\forall t \in [t_0; +\infty[, f(X + tX_1) = f \circ R_\theta(X + tX_1).$$

En déduire que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(X) = f \circ R_\theta(X).$$

II.E.3) En déduire quels sont les endomorphismes symétriques  $U$  satisfaisant aux conditions (1) et reconnaître toutes les surfaces  $F_1$  associées.

---

••• FIN •••

---