

*Sur le calcul ombral***Objectifs**

Ce problème introduit le calcul ombral et propose d'en démontrer certains résultats.

Historiquement, ce « calcul » reposait sur un ensemble de manipulations heuristiques sur les indices qui étaient traités comme des puissances. Pour justifier ces règles, une solution consiste à utiliser des endomorphismes agissant sur des polynômes. Ce problème a pour objectif de présenter ces règles et d'en déduire des identités polynomiales non triviales.

**Notations**

- $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
- $\mathbb{K}[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Dans ce problème, on identifie polynômes formels et fonctions polynomiales de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  associées. On identifie de plus les éléments de  $\mathbb{K}$  aux polynômes constants.
- Tout polynôme  $p \in \mathbb{K}[X]$  s'écrit de manière unique

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où  $(a_k)$  est une suite à valeurs dans  $\mathbb{K}$  nulle à partir d'un certain rang. Si  $p$  n'est pas le polynôme nul, son degré  $\deg(p)$  est le plus grand entier  $k$  tel que  $a_k \neq 0$ . Par convention, le degré du polynôme nul est  $-1$  (cette convention est inhabituelle).

- Si  $n$  est un entier naturel,  $\mathbb{K}_n[X]$  désigne le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- On note  $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$  l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}[X]$ .
- On note  $I$  l'endomorphisme identité de  $\mathbb{K}[X]$ .
- Les éléments inversibles de l'algèbre  $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$  sont les endomorphismes bijectifs (automorphismes) de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}[X]$ .
- Pour  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$  et  $p \in \mathbb{K}[X]$ , on note  $Tp = T(p)$ .
- $D$  désigne l'endomorphisme de dérivation sur  $\mathbb{K}[X]$  :  $\forall p \in \mathbb{K}[X], D(p) = Dp = p'$ .
- Si  $T$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ , on définit la suite d'endomorphismes  $(T^k)$  par récurrence :  $T^0 = I$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T^{k+1} = T \circ T^k = T^k \circ T$ .

**I Étude d'endomorphismes de  $\mathbb{K}[X]$** 

**I.A** — Soit  $a \in \mathbb{K}$ . Pour tout  $p \in \mathbb{K}[X]$ , on pose  $E_a(p) = E_a p = p(X + a)$ .

**Q 1.** Montrer que  $E_a$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .

**I.B** — À tout  $p \in \mathbb{R}[X]$ , on associe la fonction  $J(p) = Jp$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(p)(x) = Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t) dt.$$

**Q 2.** Montrer que  $J$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

**Q 3.** Montrer que  $J$  conserve le degré et que  $J$  est inversible.

**I.C** — À tout  $p \in \mathbb{K}[X]$ , on associe la fonction  $L(p) = Lp$  de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad L(p)(x) = Lp(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-t} p'(x+t) dt.$$

**Q 4.** Montrer que  $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt$  existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et calculer sa valeur.

**Q 5.** Montrer que  $L$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ . Est-il inversible ?

## II Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

Soit  $T$  un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ . On dit que :

- $T$  est *shift-invariant* si, pour tout  $a \in \mathbb{K}$ ,  $E_a \circ T = T \circ E_a$  ;
- $T$  est un *endomorphisme delta* si  $T$  est shift-invariant et si l'image du polynôme  $X$  par  $T$  est une constante non nulle :  $TX \in \mathbb{K}^*$ .

### II.A –

**Q 6.** Soit  $a \in \mathbb{K}$ . Vérifier que les endomorphismes  $I$  et  $D$  sont shift-invariants, ainsi que les endomorphismes  $E_a$ ,  $J$  et  $L$  définis dans la partie I. Sont-ils des endomorphismes delta ?

**Q 7.** Montrer que l'ensemble des endomorphismes shift-invariants de  $\mathbb{K}[X]$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ . L'ensemble des endomorphismes delta de  $\mathbb{K}[X]$  est-il stable par addition ? par composition ?

### II.B –

**Q 8.** Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ . Pour tout polynôme  $p \in \mathbb{K}[X]$ , montrer que l'expression

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$$

a un sens et définit un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ .

On note alors  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$  l'application de  $\mathbb{K}[X]$  qui, à un polynôme  $p \in \mathbb{K}[X]$ , associe le polynôme  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$ .

**Q 9.** Montrer que, pour toute suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ ,  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$  est un endomorphisme shift-invariant.

**Q 10.** Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  des suites d'éléments de  $\mathbb{K}$  telles que  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$ .

Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k = b_k$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le polynôme  $q_n = \frac{X^n}{n!}$ . On se donne  $T$  un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Q 11.** Montrer que  $T$  est un endomorphisme shift-invariant si, et seulement si,

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k.$$

**Q 12.** Montrer que deux endomorphismes shift-invariants de  $\mathbb{K}[X]$  commutent.

**II.C –** Dans cette sous-partie, on applique le résultat de la question 11 aux endomorphismes de la partie I.

**Q 13.** Pour tout  $p \in \mathbb{K}[X]$  non nul et  $a \in \mathbb{K}$ , montrer, à l'aide de la question 11, que

$$p(X + a) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}$$

où  $p^{(k)}$  désigne la dérivée  $k$ -ième du polynôme  $p$ . Reconnaitre cette formule.

**Q 14.** Pour  $p \in \mathbb{K}[X]$ , exprimer  $Jp$  en fonction des dérivées  $p^{(k)}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) de  $p$ .

**Q 15.** Démontrer que l'endomorphisme  $D - I$  est inversible et exprimer  $L$  en fonction de  $(D - I)^{-1}$ .

**II.D –** Dans cette sous-partie,  $T$  est un endomorphisme non nul shift-invariant de  $\mathbb{K}[X]$ .

On rappelle que le degré du polynôme nul est par convention égal à  $-1$ .

**Q 16.** Montrer qu'il existe un entier naturel  $n(T)$  tel que, pour tout polynôme  $p \in \mathbb{K}[X]$ ,

$$\deg(Tp) = \max\{-1, \deg(p) - n(T)\}.$$

**Q 17.** En déduire  $\ker(T)$  en fonction de  $n(T)$ .

- Q 18.** Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
- (1)  $T$  est inversible ;
  - (2)  $T1 \neq 0$  ;
  - (3)  $\forall p \in \mathbb{K}[X], \deg(Tp) = \deg(p)$ .
- Q 19.** Si ces conditions sont vérifiées, montrer que  $T^{-1}$  est encore un endomorphisme shift-invariant.

**II.E –** Dans cette sous-partie,  $T$  est un endomorphisme delta de  $\mathbb{K}[X]$ .

- Q 20.** Montrer qu'il existe une suite de scalaires  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $\alpha_0 = 0, \alpha_1 \neq 0$  et  $T = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k$ .
- Q 21.** Montrer qu'il existe un unique endomorphisme  $U$  shift-invariant et inversible tel que  $T = D \circ U$ . Préciser  $U$  dans le cas  $T = D$ , puis dans le cas  $T = L$ .
- Q 22.** Pour tout polynôme  $p \in \mathbb{K}[X]$  non nul, vérifier que  $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$ . En déduire  $\ker(T)$  et le spectre de  $T$ .
- Q 23.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $T_n$  la restriction de  $T$  à  $\mathbb{K}_n[X]$ . Montrer que  $T_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Est-il diagonalisable ?
- Q 24.** Déterminer  $\text{Im}(T_n)$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$  et en déduire que  $T$  est surjectif.

### III Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

On souhaite montrer que, pour tout endomorphisme delta  $Q$ , il existe une unique suite de polynômes  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{K}[X]$  telle que

- $q_0 = 1$  ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(q_n) = n$  ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n(0) = 0$  ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, Qq_n = q_{n-1}$ .

Cette suite sera appelée *suite de polynômes associée* à l'endomorphisme delta  $Q$ .

**III.A –** Soit  $Q$  un endomorphisme delta.

- Q 25.** Montrer l'existence et l'unicité de la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes associée à  $Q$ .
- Q 26.** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \quad q_n(x + y) = \sum_{k=0}^n q_k(x) q_{n-k}(y).$$

**III.B –** Réciproquement, soit  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(q_n) = n$  et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \quad q_n(x + y) = \sum_{k=0}^n q_k(x) q_{n-k}(y).$$

- Q 27.** Montrer qu'il existe un unique endomorphisme delta  $Q$  dont  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite de polynômes associée.

**III.C –** Soit  $Q$  un endomorphisme delta, soit  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes associée à  $Q$  et soit  $n$  un entier naturel.

- Q 28.** Montrer que la famille  $(q_0, q_1, \dots, q_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- Q 29.** D'après la question 23,  $Q$  induit un endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$  noté  $Q_n$ . Donner sa matrice dans la base précédente. En déduire sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique.

**III.D –** Dans cette sous-partie, on détermine la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes associée à certains endomorphismes.

- Q 30.** Pour  $Q = D$ , vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = \frac{X^n}{n!}.$$

- Q 31.** Pour  $Q = E_1 - I$ , vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

**III.E** – Cette sous-partie propose de généraliser la formule de Taylor démontrée dans la partie II. On se donne  $Q$  un endomorphisme delta et on note  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes associée à  $Q$ .

**Q 32.** Démontrer que, pour tout  $p \in \mathbb{K}[X]$ , l'expression  $\sum_{k=0}^{+\infty} (Q^k p)(0) q_k$  a un sens et définit un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ , puis que

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} (Q^k p)(0) q_k.$$

**Q 33.** En déduire que, pour tout endomorphisme shift-invariant  $T$ , on a

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (T q_k)(0) Q^k.$$

**III.F** –

**Q 34.** En choisissant  $Q = E_1 - I$ , démontrer que, si  $p$  est un polynôme non constant, alors

$$p'(X) = \sum_{k=1}^{\deg(p)} \frac{1}{k} \left( \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \binom{k}{j} p(X+j) \right).$$

C'est la *formule de dérivation numérique des polynômes*.

## IV Un peu de calcul ombral

Si  $T$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  on définit sa dérivée de Pincherle, notée  $T'$ , comme l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  tel que,

$$\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad T'(p) = T(Xp) - XT(p).$$

**IV.A** – Soient  $S$  et  $T$  deux endomorphismes de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Q 35.** Montrer que, s'il existe  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de scalaires telle que  $T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ , alors  $T' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k D^{k-1}$ .

**Q 36.** Si  $T$  est un endomorphisme shift-invariant, montrer que  $T'$  est encore un endomorphisme shift-invariant.

**Q 37.** Si  $T$  est un endomorphisme delta, montrer que  $T'$  est un endomorphisme shift-invariant et inversible.

**Q 38.** Vérifier que  $(S \circ T)' = S' \circ T + S \circ T'$ .

**IV.B** – Soit  $Q$  un endomorphisme delta. On rappelle que d'après la partie II, il existe un unique endomorphisme  $U$  shift-invariant et inversible tel que  $Q = D \circ U$ . On note  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes associée à  $Q$  au sens de la partie III.

**Q 39.** Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$(Q' \circ U^{-n-1})(X^n) = X U^{-n}(X^{n-1}).$$

**Q 40.** En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$n! q_n(X) = X U^{-n}(X^{n-1})$$

puis que

$$n q_n(X) = X(Q')^{-1}(q_{n-1}).$$

**IV.C** – Dans cette sous-partie, on applique les résultats de la question 40 à l'endomorphisme  $L$  étudié dans les parties I et II. On note  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sa suite de polynômes associée au sens de la partie III.

**Q 41.** Vérifier que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\ell'_n = \ell'_{n-1} - \ell_{n-1}$$

et

$$X \ell''_n - X \ell'_n + n \ell_n = 0$$

et

$$\ell_n(X) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{k!}.$$

**IV.D** – Soient  $Q$  un endomorphisme delta de suite de polynômes associée notée  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Q 42.** Montrer qu'il existe un unique endomorphisme inversible  $T$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Tq_n = \frac{X^n}{n!}.$$

**Q 43.** Montrer aussi que  $D = T \circ Q \circ T^{-1}$ .

**IV.E** – On fixe  $\alpha > 0$  et on définit la fonction  $W$  de  $\mathbb{K}[X]$  par

$$W : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ p & \mapsto p(\alpha X) \end{cases}$$

**Q 44.** Montrer que  $W$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .

On pose  $P = W \circ L \circ W^{-1}$  où  $L$  est l'endomorphisme étudié dans les parties I et II.

**Q 45.** Montrer que

$$P = \frac{1}{\alpha} D \circ \left( \frac{1}{\alpha} D - I \right)^{-1}.$$

**Q 46.** Montrer ensuite que  $P$  est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \ell_n(\alpha X).$$

**Q 47.** Vérifier que  $D = L \circ (L - I)^{-1}$  puis que  $P = L \circ (\alpha I + (1 - \alpha)L)^{-1}$ .

On note  $T$  l'unique automorphisme vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T\ell_n = \frac{X^n}{n!}$  et on pose  $Q = T \circ P \circ T^{-1}$ .

**Q 48.** Montrer que  $Q = D \circ (\alpha I + (1 - \alpha)D)^{-1}$ . En déduire que  $Q$  est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}.$$

**Q 49.** Conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell_n(\alpha X) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \ell_k(X).$$

*Les endomorphismes  $W$  et  $T$  étudiés dans la sous-partie IV.E sont appelés opérateurs ombraux. Les polynômes  $(\ell_n)$  associés à l'endomorphisme  $L$  sont connus sous le nom de polynômes de Laguerre (de paramètre  $-1$ ). La dernière formule démontrée grâce aux opérateurs ombraux est leur formule de duplication.*

---

• • • FIN • • •

---