

MATHÉMATIQUES II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit A une matrice carrée d'ordre n , dont les coefficients sont des entiers naturels. On note a_{ij} le coefficient de A appartenant à la i -ème ligne et à la j -ème colonne de A .

On suppose que A est *symétrique* et que les coefficients de la diagonale principale de A sont égaux à 1.

On désigne par M la matrice réelle, carrée, d'ordre n , de coefficient m_{ij} , définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{a_{ij}}\right) & \text{si } a_{ij} \neq 0 \\ -1 & \text{si } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

On remarque que M est symétrique et que les coefficients de sa diagonale principale valent 1.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base donnée de E .

Pour chaque entier i compris entre 1 et n , on désigne par σ_i l'endomorphisme de E caractérisé par :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \sigma_i(e_j) = e_j - 2m_{ij}e_i.$$

On note τ l'endomorphisme de E donné par :

$$\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \dots \circ \sigma_n.$$

où $\circ$ désigne la composition des applications.

On désigne par S_i et T les matrices associées aux endomorphismes σ_i et τ dans la base $\mathcal{B}$ et par I la matrice unité d'ordre n associée à l'identité (notée Id).

Partie I - Étude du cas $n = 2$

Dans cette partie I, on suppose $n = 2$ et on pose :

$$a = a_{12} = a_{21} \text{ et } m = m_{12} = m_{21}.$$

I.A -

I.A.1) Expliciter M en fonction de m puis en fonction de a .

I.A.2) Donner en fonction de m les matrices S_1 , S_2 et T .

Filière PC

I.B - On suppose dans cette question I.B que $a \in \{0,1\}$ et donc que $|m| = 1$.

I.B.1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de τ

I.B.2) La matrice T est-elle diagonalisable ? (Justifier la réponse).

I.B.3) Diagonaliser ou trigonaliser, si possible, la matrice T .

I.B.4) Montrer que τ est d'ordre infini (c'est à dire qu'il n'existe pas d'entier naturel strictement positif k tel que $\tau^k = Id$, où $\tau^k = \tau \circ \tau \circ \dots \tau$ désigne la puissance k -ième de τ pour la loi de composition).

I.C - On suppose dans cette question I.C, que a est supérieur ou égal à 2, et donc que $|m| < 1$.

On définit la forme bilinéaire ϕ sur $E \times E$ par :

$$\phi(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) = xx' + yy' + m(xy' + yx'), \text{ pour tous } x, x', y, y' \text{ réels.}$$

I.C.1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

Muni de ce produit scalaire, E est un plan euclidien, que nous noterons aussi E .

I.C.2) Pour quelle valeur de a la base $\mathcal{B}$ est-elle orthonormale ?

I.C.3) Montrer que les sous-espaces propres de σ_1 sont orthogonaux.

I.C.4) Montrer que σ_1 et σ_2 sont des symétries orthogonales en précisant par rapport à quelles droites vectorielles.

I.C.5) Montrer que τ est une rotation et déterminer une mesure en radians de l'angle de cette rotation, en supposant la base $\mathcal{B}$ directe.

I.C.6) En déduire que τ est d'ordre a , c'est-à-dire que a est le plus petit entier strictement positif k tel que $\tau^k = Id$.

I.D - On suppose dans cette question que $a \in \{2, 3, 4, 6\}$.

I.D.1) Dans chacun des cas $a = 2, 3, 4, 6$, déterminer un réel μ_a , $1 \leq \mu_a < 2$, tel que les matrices associées à σ_1 et σ_2 relativement à la base $(e_1, \mu_a e_2)$, aient tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

I.D.2) Dans chacun des cas $a = 2, 3, 4, 6$, faire une figure soignée où l'on indiquera e_1 et $f_2 = \mu_a e_2$, ainsi que leurs images par σ_1 et σ_2 . On représentera le plan euclidien E de façon usuelle, c'est-à-dire que des vecteurs orthogonaux seront représentés par des flèches perpendiculaires et des vecteurs de même norme par des flèches de même longueur.

Partie II - Étude du cas général

Dans cette partie n désigne un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

II.A -

II.A.1)

- a) Pour i compris entre 1 et n , calculer $\sigma_i(e_i)$.
- b) Exprimer $\sigma_i^2 = \sigma_i \circ \sigma_i$ en fonction de l'identité.
- c) Montrer que $E = \text{Ker}(\sigma_i - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\sigma_i + \text{Id})$.

II.A.2) On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et, pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $\varepsilon_k = \sigma_1 \circ \sigma_2 \dots \sigma_{k-1}(e_k)$.

- a) Montrer par récurrence sur $i < k$, que, pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, on a :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \dots \sigma_i(e_k) = e_k - 2 \sum_{1 \leq j \leq i} m_{jk} \varepsilon_j.$$

- b) Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E .

II.A.3)

- a) Exprimer $\tau(e_n)$ en fonction de ε_n .
- b) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ on a :

$$\tau(e_k) = -\varepsilon_k - 2 \sum_{j=k+1}^n m_{jk} \varepsilon_j.$$

II.A.4) Soit C la matrice carrée d'ordre n , triangulaire supérieure, dont les coefficients c_{ij} sont donnés par :

$$c_{ij} = \begin{cases} 2m_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

On notera ${}^t C$ la matrice transposée de la matrice C .

On désigne par P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$.

- a) Exprimer P^{-1} en fonction de C .
- b) Montrer que :

$$T = -(I + C)^{-1}(I + {}^t C).$$

- c) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\det(\lambda I - T) = \det((\lambda + 1)I + \lambda C + {}^t C).$$

II.B - Soient i, j vérifiant : $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$; on note E_{ij} le sous-espace vectoriel de E engendré par e_i et e_j .

II.B.1)

a) Montrer que $\dim E_{ij} = 2$.

b) Montrer que E_{ij} est stable par σ_i , σ_j , $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$.

On note π_{ij} et π_{ji} les restrictions de $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$ à E_{ij} .

c) Donner les matrices Π_{ij} et Π_{ji} associées à π_{ij} et π_{ji} relativement à la base (e_i, e_j) de E_{ij} .

d) Vérifier que Π_{ij} et Π_{ji} sont inverses l'une de l'autre. Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

II.B.2)

a) Montrer que, si pour tous i et j on a $a_{ij} \in \{0, 1\}$, alors π_{ij} et π_{ji} sont d'ordre infini.

b) Quels sont les ordres de π_{ij} et π_{ji} lorsque $a_{ij} \geq 2$?

II.C - On suppose dans cette section que :

i) $n \geq 3$

ii) $a_{ij} = 2$ pour $1 < |i - j| < n - 1$

iii) $\{a_{12}, a_{23}, \dots, a_{(n-1)n}, a_{n1}\} \subset \{3, 4, 6\}$.

On pose $\beta_n = 2m_{1n}$ et $\beta_i = 2m_{i(i+1)}$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

On désigne par p (resp. q) le nombre de couples (i, j) , $i < j$, tels que $a_{ij} = 4$ (resp. $a_{ij} = 6$).

II.C.1) Montrer que si p et q sont pairs, alors il existe un n -uplet de réels $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ tel que les matrices de tous les σ_k , pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, relativement à la base $(v_1 e_1, v_2 e_2, \dots, v_n e_n)$, ont leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

II.C.2) $\det(\lambda I - T)$ est un polynôme réel en λ , de degré n , que l'on écrira $\det(\lambda I - T) = \sum \alpha_k \lambda^k$.

a) Justifier que $\alpha_n = 1$ et $\alpha_{n-1} = -\text{tr } T$, où $\text{tr } T$ désigne la trace de T .

b) Calculer, pour $n = 3$, $\det(\lambda I - T)$ en fonction de λ , β_1 , β_2 et β_3 .

c) Montrer que

$$\alpha_{n-1} = n - \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i^2 + (-1)^{n+1} \beta_1 \dots \beta_n$$

(on pourra utiliser la question II.A.4 et démontrer la relation par récurrence sur n).

II.C.3)

a) Montrer que, s'il existe une base de E dans laquelle toutes les matrices des σ_k ont tous leurs coefficients entiers, alors la trace de τ est un entier.

b) Montrer que si p est impair ou q est impair, alors la trace de τ est irrationnelle.

c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de tous les σ_k ont tous leurs coefficients entiers si et seulement si p et q sont pairs.

Partie III - Un exemple dans le cas de $n = 3$

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

III.A - Peut-on trouver une base de E dans laquelle les matrices de σ_1 , σ_2 et σ_3 ont tous leurs coefficients entiers ?

III.B - On définit la forme bilinéaire Φ sur $E \times E$ par :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij} x_i y_j$$

pour tous $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ réels.

III.B.1) Vérifier que Φ est un produit scalaire.

On considérera donc E comme un espace vectoriel euclidien muni de ce produit scalaire.

III.B.2) Donner une équation cartésienne de l'orthogonal, pour Φ , du vecteur $ae_1 + be_2 + ce_3$ en fonction de a, b, c .

III.C -

III.C.1) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer les sous-espaces $F_i = \text{Ker}(\sigma_i - \text{Id})$ et $G_i = \text{Ker}(\sigma_i + \text{Id})$.

III.C.2) En déduire que les σ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, sont des symétries orthogonales par rapport à des plans (ou réflexions) de E .

III.D - Montrer que les $\sigma_i \circ \sigma_j$, pour $1 \leq i, j \leq 3$, sont des rotations et les caractériser.

III.E -

III.E.1) Que peut-on dire de $\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$?

III.E.2) Déterminer la matrice T .

Déterminer un vecteur non nul u de norme 1 tel que $\tau(u) = -u$, puis une base directe de E , de premier vecteur u , orthonormale pour Φ , $\mathcal{D} = (u, v, w)$.

III.E.3) Montrer que τ est la composée d'une rotation d'axe $\mathbb{R}u$, dont on précisera l'angle et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathbb{R}u)^\perp$.

Donner l'ordre de la matrice T , c'est-à-dire le plus petit entier $k > 0$ tel que $T^k = I$.

••• FIN •••
