

# MATHÉMATIQUES II

Préliminaires et notations :

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $K$  désigne l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
- $K[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $K$ .
- L'espace  $\mathbb{R}^n$  sera si nécessaire muni de son produit scalaire canonique, et rapporté à la base canonique qui est orthonormale.

## Partie I -

On rappelle que  $E = K^n$  est un espace vectoriel sur  $K$  de dimension  $n$  pour les lois usuelles. On munit de plus  $E$  d'une multiplication notée  $\times$  et définie par : Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $E$ ,  $x \times y = (x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n)$ .

**I.A -** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  fixé dans  $E$ . Pour  $P \in K[X]$ , on notera :

$$P(x) = (P(x_1), \dots, P(x_n)).$$

I.A.1) Vérifier que  $\Phi : P \mapsto P(x)$  est une application linéaire de  $K[X]$  vers  $E$ , telle que  $\Phi(P \cdot Q) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$  pour tout  $P, Q \in K[X]$ .

I.A.2) Montrer que  $A_x = \{P(x), P \in K[X]\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $A_x$  est stable pour  $\times$ , c'est-à-dire que, si  $y, z \in A_x$  alors  $y \times z \in A_x$ .

I.A.3) On suppose ici  $x_i \neq x_j$  pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i \neq j$ .

On note  $K_{n-1}[X]$  l'ensemble des polynômes de  $K[X]$  dont le degré est inférieur ou égal à  $n-1$ .

Montrer que la restriction de  $\Phi$  à  $K_{n-1}[X]$  est injective.

Montrer que  $A_x$  est de dimension  $n$ .

**I.B -** Soit  $y = (y_1, \dots, y_n)$  donné dans  $E$ , ainsi que  $P \in K[X]$  fixé de degré  $\geq 1$ .

On s'intéresse à l'ensemble noté  $R_{y,P} : R_{y,P} = \{x \in E / P(x) = y\}$ .

I.B.1) Montrer que si  $K = \mathbb{C}$ ,  $R_{y,P}$  n'est jamais vide.

I.B.2) Montrer que si  $K = \mathbb{R}$ ,  $R_{y,P}$  peut être vide : donner un exemple.

I.B.3) On suppose  $K = \mathbb{C}$ , et  $P(X) = X^p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Déterminer le cardinal de  $R_{y,P}$ , noté  $\text{Card}(R_{y,P})$ , en fonction de  $p$  et de  $m_y = \text{Card}(\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket / y_i \neq 0\})$ .

# Filière PC

I.B.4) D'une façon générale, donner un majorant de  $\text{Card}(R_{\Gamma, P})$  en fonction de  $n$  et du degré de  $P$ .

**I.C -** Pour  $\Gamma$  partie non vide de  $E$ , et  $P \in K[X]$  fixé de degré  $\geq 1$ , on s'intéresse à l'ensemble noté  $R_{\Gamma, P} = \{x \in E / P(x) \in \Gamma\}$ .

I.C.1) Exemple 1 : On prend  $K = \mathbb{R}$ ,  $n = 2$ ,  $P(X) = X^2$ . Déterminer et dessiner  $\Gamma$  et  $R_{\Gamma, P}$ , dans chacun des cas suivants :

i)  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = 1\}$ ,

ii)  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 1\}$ ,

iii)  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\}$ .

I.C.2) Exemple 2 : On prend  $K = \mathbb{R}$ ,  $n = 3$ ,  $P(X) = X^2$ . Déterminer et donner la nature géométrique de  $\Gamma$  et  $R_{\Gamma, P}$ , dans chacun des deux cas suivants :

i)  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 1\}$ ,

ii)  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 1\}$ .

I.C.3) Exemple 3 : On prend  $K = \mathbb{R}$ ,  $n = 2$ ,  $P(X) = X^3 - X$  et soit :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}.$$

Déterminer et dessiner  $\Gamma$  et  $R_{\Gamma, P}$ .

**I.D -** Pour cette question, on pourra utiliser sur  $E$  la norme infinie définie par :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ est dans } E, \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

I.D.1) On suppose que  $\Gamma$  est de cardinal fini. Donner un majorant de  $\text{Card}(R_{\Gamma, P})$  en fonction de  $\text{Card}(\Gamma)$ , de  $n$  et du degré de  $P$ .

I.D.2) Si  $\Gamma$  est borné, montrer que  $R_{\Gamma, P}$  est borné. Lorsque  $K = \mathbb{R}$ , donner un exemple pour lequel  $\Gamma$  est non borné et  $R_{\Gamma, P}$  est borné. Lorsque  $K = \mathbb{C}$ , si  $R_{\Gamma, P}$  est borné, montrer que  $\Gamma$  est borné.

## Partie II -

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$  de dimension finie  $N \geq 1$  et  $\mathcal{L}(V)$  l'espace vectoriel sur  $K$  des endomorphismes de  $V$ , qui est aussi muni de la loi de composition  $\circ$ .

On note  $\text{id}_V$  l'application identité de  $V$  dans  $V$ .

**II.A** - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \leq N$ .

On considère  $n$  projecteurs non nuls  $p_1, p_2, \dots, p_n$  de  $\mathcal{L}(V)$  tels que :

$$\sum_{k=1}^n p_k = \text{id}_V, \text{ et } p_i \circ p_j = 0 \text{ pour tout } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tels que } i \neq j.$$

$$\text{On pose } \mathcal{A} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k p_k / (x_1, \dots, x_n) \in K^n \right\}.$$

II.A.1) Montrer que  $\mathcal{A}$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , stable pour  $\circ$ .

II.A.2) Montrer que l'application  $\Psi$  de  $E$  vers  $\mathcal{A}$ , définie par :

$$\Psi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

est un isomorphisme tel que, pour tout  $x, y \in E$ ,  $\Psi(x \times y) = \Psi(x) \circ \Psi(y)$ .

II.A.3) Montrer que, pour tout  $x \in E$  et  $P \in K[X]$ ,  $\Psi(P(x)) = P(\Psi(x))$ .

**II.B** - Soit  $f \in \mathcal{A}$ , avec  $f = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k$ , où  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ .

On suppose  $\lambda_i \neq \lambda_j$  pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i \neq j$ .

II.B.1) Soit  $g \in \mathcal{A}$  avec  $g = \sum_{k=1}^n \mu_k p_k$ , et  $P \in K[X]$ .

Montrer que  $g = P(f)$  si et seulement si  $P(\lambda_k) = \mu_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

II.B.2) Montrer que pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $P_j \in K[X]$  tel que  $p_j = P_j(f)$ .

II.B.3) Montrer que  $f$  est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres.

**II.C** - Soit  $f \in \mathcal{L}(V)$  supposé diagonalisable. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres distinctes et on pose  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Pour  $P \in K[X]$  donné, on note  $R_{f,P} = \{g \in \mathcal{L}(V) / f = P(g)\}$ .

II.C.1) Donner  $n$  projecteurs non nuls  $p_1, p_2, \dots, p_n$  tels que

$$\sum_{k=1}^n p_k = \text{id}_V, p_i \circ p_j = 0 \text{ pour tout } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tels que } i \neq j, \text{ et } f = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k.$$

On dispose ainsi de l'application  $\Psi$  définie en II.A.

II.C.2) Soit  $g \in R_{f,P}$ .

Montrer que  $f \circ g = g \circ f$ .

Montrer que chaque sous-espace  $V_j = \ker(f - \lambda_j \text{id}_V)$  est stable par  $g$ , pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

On suppose que  $g$  est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres pour  $f$  et propres pour  $g$ .

II.C.3) Montrer que  $\Psi(R_{\lambda,P}) \subset R_{f,P}$  et que, si toutes les valeurs propres de  $f$  sont simples, on a l'égalité  $\Psi(R_{\lambda,P}) = R_{f,P}$ .

On suppose que  $K = \mathbb{C}$  et que  $P(X) = X^r$  avec  $r \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le cardinal de  $R_{f,P}$  lorsque toutes les valeurs propres de  $f$  sont simples.

II.C.4) On suppose que  $K = \mathbb{C}$  et que  $P(X) = X^r$  avec  $r \in \mathbb{N}$  et  $r \geq 2$ .

Lorsque  $N \geq 2$ , montrer que  $R_{\text{id}_V,P}$  est de cardinal infini.

Montrer que  $R_{f,P}$  est de cardinal infini si et seulement si  $f$  admet au moins une valeur propre multiple.

II.C.5) On suppose que  $K = \mathbb{C}$  et que  $P(X) = X^r$  avec  $r \in \mathbb{N}^*$ .

Si l'on suppose que les complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont tous non nuls, montrer que si  $g \in R_{f,P}$ , alors  $g$  est diagonalisable.

Si l'on suppose que  $\lambda_1 = 0$  et que  $g \in R_{f,P}$ , montrer que  $g$  est diagonalisable si et seulement si  $f$  et  $g$  ont le même rang.

**II.D - Exemple 4 :** On prend  $K = \mathbb{R}$ , et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  de matrice dans la base canonique :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer, par leur matrice  $G$  dans la base canonique, toutes les applications  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ , telles que  $g^2 = f$ .

### Partie III -

Dans cette partie on considère un espace vectoriel euclidien  $V$  de dimension  $N \geq 1$ , muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , la norme euclidienne associée étant notée  $\|\cdot\|$ .

On note  $O(V)$  le groupe (pour la loi  $\circ$ ) des automorphismes orthogonaux de  $V$ .

On note de plus  $S(V)$  l'ensemble des endomorphismes symétriques de  $V$ .

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$  donné. Pour  $f \in \mathcal{L}(V)$ , on s'intéresse à  $R_r(f) = \{g \in \mathcal{L}(V) / f = g^r\}$  et aux sous-ensembles  $S(V) \cap R_r(f)$  ou  $O(V) \cap R_r(f)$ .

### III.A -

III.A.1) Montrer que si  $S(V) \cap R_r(f)$  est non vide alors  $f \in S(V)$ .

III.A.2) On suppose ici que  $r$  est pair et  $f \in S(V)$ . Montrer que  $S(V) \cap R_r(f)$  est non vide si et seulement si toutes les valeurs propres de  $f$  sont dans  $\mathbb{R}_+$ .

III.A.3) On suppose ici que  $r$  est impair et  $f \in S(V)$ . Montrer que  $S(V) \cap R_r(f)$  est non vide et est réduit à un seul élément.

III.A.4) Exemple 5 :

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $B^2 = A$ .

Déterminer toutes les matrices  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  symétriques telles que  $B^3 = A$ .

### III.B -

III.B.1) Montrer que si  $O(V) \cap R_r(f)$  est non vide, alors  $f \in O(V)$ .

III.B.2) Soit  $g \in O(V)$ . Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $g$ , il en est de même de son orthogonal  $F^\perp$ .

III.B.3) On suppose ici  $N = 2$  et  $V$  orienté, et on suppose que  $f$  est la rotation d'angle de mesure  $\theta$ , avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $O(V) \cap R_r(f)$ .

III.B.4) Exemple 6 :

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telles que  $B^2 = A$ .

Déterminer toutes les matrices  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  orthogonales telles que  $B^2 = A$ .

**III.C** - Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension  $m$ , et  $f$  la symétrie orthogonale par rapport à  $F$ .

III.C.1) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $r$  et  $m$  pour que  $R_r(f)$  soit non vide, et exhiber dans ce cas un élément  $g \in O(V) \cap R_r(f)$ .

III.C.2) Étudier  $S(V) \cap R_r(f)$ .

**III.D** - On suppose ici que  $N = 3$ , et on considère l'espace euclidien  $V = \mathbb{R}^3$  orienté, muni de son produit scalaire canonique, la base canonique étant orthogonale directe.

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $f$  la rotation d'angle de mesure  $\theta$ , avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , d'axe  $D = \mathbb{R}u$ , où  $\|u\| = 1$  ;  $f \neq \text{id}_V$ .

III.D.1) Déterminer  $O(V) \cap R_r(f)$ .

III.D.2) Déterminer  $O(V) \cap R_r(-f)$ .

III.D.3) Exemple 7 :

Déterminer, par leur matrice dans la base canonique, toutes les rotations  $g$  de  $V$ , telles que  $g^3$  soit la rotation d'axe dirigé par  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ .

---

••• FIN •••

---