



## Notations

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers tels que  $a \leq b$ , on note  $\llbracket a, b \rrbracket$  l'ensemble des entiers  $k$  tels que  $a \leq k \leq b$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à  $n$  toute fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

où, pour tout  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ . On note  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $n$ . C'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note  $\mathcal{C}_{2\pi}^0$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{C}_{2\pi}^1$  le sous-espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$   $2\pi$ -périodiques. Pour  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $h > 0$ , on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

## Partie A – Préliminaires

**Q1.** Montrer que si  $g$  est la fonction sinus, alors, pour tout  $h > 0$ ,  $\omega_g(h) \leq h$ .

**Q2.** (a) Montrer que, pour tous  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $h > 0$ ,  $\omega_g(h)$  est un réel bien défini.

(b) On suppose que  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ . Montrer que, pour tout  $h > 0$ ,  $\omega_g(h) \leq \|g'\|_\infty h$ . En déduire que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ .

On admet que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$  est vrai pour tout  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .

**Q3.** Soit  $h$  et  $h'$  deux réels strictement positifs et soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ .

(a) Montrer que, si  $h \leq h'$ , alors  $\omega_g(h) \leq \omega_g(h')$ .

(b) Montrer que  $\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$ .

(c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 et pour tout réel  $\lambda$  strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leq (1 + \lambda)\omega_g(h).$$

**Q4.** Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

**Q5.** Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $p \in \mathcal{T}_n$ , on note  $\Delta(p)$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que  $\Delta$  définit un endomorphisme de  $\mathcal{T}_n$ .

## Partie B –

### I – La fonction $J_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonctions  $\varphi_n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  en posant, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q6.** Montrer que, pour tout réel  $t$  n'appartenant pas à  $2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4.$$

**Q7.** Montrer que  $\varphi_n$  et  $\varphi_n^2$  appartiennent à  $\mathcal{T}_n$ , puis que  $f_n$  appartient à  $\mathcal{T}_{2n}$ .

**Q8.** Montrer qu'il existe un réel strictement positif  $c_n$  tel que  $\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose désormais  $J_n = c_n f_n$ , de sorte que  $J_n$  est une fonction réelle positive vérifiant

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1.$$

### II – Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q9.** Montrer que  $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}$ .

**Q10.** Montrer que pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$ .

**Q11.** En déduire que  $\int_0^{\pi} t f_n(t) dt \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$ .

**Q12.** En déduire également que  $\int_0^{\pi} f_n(t) dt \geq 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du$ .

**Q13.** Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}$ .

### III – Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $T_n g$  en posant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t) dt.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que  $(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q14.** Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t) dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x) dt$$

En déduire que  $|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt$ .

**Q15.** Le cas  $\mathcal{C}^1$ . On suppose, seulement dans cette question, que  $g$  est  $\mathcal{C}^1$ .

(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|T_n g - g\|_{\infty} \leq \frac{a \|g'\|_{\infty}}{n+1},$$

où le réel  $a$  a été défini à la question **Q13**.

(b) Conclure que  $(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q16.** Le cas  $\mathcal{C}^0$ . Dans cette question, on ne suppose plus que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On rappelle le résultat admis à la question **Q2** :  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ .

(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tous réels  $t$  et  $x$ ,

$$|g(x-t) - g(x)| \leq (1+n|t|)\omega_g(1/n).$$

(b) En déduire qu'il existe  $b > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|T_n g - g\|_{\infty} \leq b \omega_g(1/n).$$

(c) Conclure que la suite  $(T_n g)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Partie C –

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[X]$  des polynômes à coefficients complexes. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{C}_n[X]$  le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

### I –

Dans cette sous-partie on fixe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et on note  $T$  le polynôme  $X^n + 1$ .

**Q17.** Montrer que  $T$  admet  $n$  racines simples dans  $\mathbb{C}$ .

On note  $z_1, \dots, z_n$  les racines de  $T$ .

**Q18.** Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $\prod_{j \neq k} (z_k - z_j) = T'(z_k)$ .

Soit  $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On considère la fonction rationnelle  $F$  donnée par  $F = \frac{X^{\ell}}{X^n + 1}$ .

On rappelle que, par décomposition en éléments simples de  $F$ , il y a existence et unicité de  $\mu_1, \dots, \mu_n$  dans  $\mathbb{C}$  et de  $E$  dans  $\mathbb{C}[X]$  tels que

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{X - z_k} + E.$$

**Q19.** Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mu_k = -\frac{z_k^{\ell+1}}{n}$  et que  $E$  est soit le polynôme nul, soit le polynôme constant égal à 1.

**Q20.** Calculer  $F'(1)$  et en déduire que  $\ell = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k - 1)^2}$ .

**Q21.** En déduire que :

(a) pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ ,  $XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$  ;

(b)  $\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}$ .

## II –

Pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ , on pose  $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$ .

**Q22.** Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathbb{C}[X]$ .

**Q23.** Montrer que, si  $z$  est un nombre complexe de module 1 et si  $z \neq 1$ , alors  $\frac{z}{(z-1)^2}$  est un réel négatif.

**Q24.** À l'aide de **Q21**, en déduire que pour tout  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ ,  $\|P'\| \leq n\|P\|$ .

**Q25.** En déduire que pour tout  $q \in \mathcal{T}_n$ ,  $\|q'\|_\infty \leq 3n\|q\|_\infty$ .

## Partie D – Fonctions höldériennes

Soit  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et soit  $\alpha \in ]0,1]$ .

On dit que  $g$  est  $\alpha$ -höldérienne s'il existe  $K > 0$  tel que, pour tous réels  $x$  et  $y$  de l'intervalle  $I$ ,  $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|^\alpha$ .

### I – Exemples

Soit  $\alpha \in ]0,1[$  et soit  $h_\alpha$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ .

**Q26.** Soit  $y$  un réel positif, montrer que pour tout  $x \geq y$  on a :  $0 \leq x^\alpha - y^\alpha \leq (x - y)^\alpha$ .

**Q27.** En déduire que  $h_\alpha$  est  $\alpha$ -höldérienne sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Q28.** Soit  $\beta \in ]0,1]$  tel que  $\beta \neq \alpha$ . Montrer que  $h_\alpha$  n'est pas  $\beta$ -höldérienne.

Soit  $k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$k : x \mapsto \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Q29.** Soit  $y \in ]0,1]$ . Montrer que pour tout  $x \in [0, 1 - y]$ ,  $(x + y) \ln(x + y) - x \ln x \leq (y - 1) \ln(1 - y)$ .

**Q30.** En déduire que  $k$  est  $\alpha$ -höldérienne sur  $[0,1]$  pour tout  $\alpha \in ]0,1[$ .

## II – Espace $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans la suite du problème, pour  $\alpha \in ]0,1[$ , on note  $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$  l'ensemble des fonctions  $\alpha$ -höldériennes  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Pour tout  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ , on pose  $\delta_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{T}_n} \|f - p\|_\infty$ .

**Q31.** Montrer que  $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ .

**Q32.** Montrer que si  $g \in \mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ , alors  $\delta_n(g) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ .

## III – Étude d'une réciproque

L'objectif de cette sous-partie est d'établir une réciproque à la question **Q32**.

On fixe un réel  $\alpha \in ]0,1[$  et une fonction  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  telle que  $\delta_n(f) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ . Il existe ainsi un réel  $C > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\delta_n(f) \leq \frac{C}{n^\alpha}$ .

**Q33.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer qu'il existe  $q_n \in \mathcal{T}_n$  tel que  $\delta_n(f) = \|f - q_n\|_\infty$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère un polynôme  $p_n \in \mathcal{T}_{2^n}$  tel que  $\|f - p_n\|_\infty = \delta_{2^n}(f)$ .

**Q34.** Montrer, en appliquant l'inégalité établie à la question **Q25**, qu'il existe un réel  $C' > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|p'_{n+1} - p'_n\|_\infty \leq C' 2^{n(1-\alpha)}.$$

**Q35.** En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} 2^{n(1-\alpha)}.$$

**Q36.** En déduire l'existence d'un réel  $A > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|p'_n\|_\infty \leq A 2^{(1-\alpha)n}.$$

**Q37.** Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq C 2^{1-n\alpha} + A 2^{(1-\alpha)n} |x - y|$ .

**Q38.** En déduire que  $f$  est  $\alpha$ -höldérienne.

Indication : lorsque  $0 < |x - y| \leq 1$ , on pourra choisir  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |x - y| \leq \frac{1}{2^n}$  et majorer  $|f(x) - f(y)|$  à l'aide de la question précédente.

---

◇   Fin   ◇

---

