

MATHÉMATIQUES II

Les deux premières parties de ce problème se proposent d'étudier deux types d'approximation d'une fonction sur un segment, et de les comparer. La troisième partie munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n d'une structure euclidienne et étudie certaines propriétés des polynômes interpolateurs de Lagrange relativement à cette structure. La troisième partie est indépendante des deux premières.

Partie I - Matrices tridiagonales

Notations : pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$M_n[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$A_n = M_n[2, 4, \dots, 4, 2] ; \quad (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 4, \alpha_n = 2)$$

$$B_n = M_n[2, 4, \dots, 4] ; \quad (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 4)$$

$$C_n = M_n[4, \dots, 4] ; \quad (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 4)$$

I.A - Méthode du pivot

Dans cette section on pose

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

et on se propose de résoudre le système $(\mathcal{S}_n) \ A_{n+1}X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, par la méthode du pivot de Gauss **sans échange de lignes**.

Filière PSI

I.A.1) Cas $n = 2$.

Résoudre par cette méthode le système $(\mathcal{S}_2)$.

On remarquera en particulier que les pivots successifs valent :

$$p_0 = 2 ; p_1 = \frac{7}{2} ; p_2 = \frac{12}{7}.$$

I.A.2) On revient au cas général.

a) Écrire une procédure de résolution du système

$$A_{n+1}X = B,$$

suivant l'algorithme du pivot de Gauss sans échange de lignes.

b) On note $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ la suite des pivots. Vérifier que :

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ \forall k \in \{0, \dots, n-2\}, p_{k+1} = 4 - \frac{1}{p_k} \\ p_n = 2 - \frac{1}{p_{n-1}} \end{cases}$$

c) Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

d) En déduire que $(\forall k \in \{0, \dots, n-1\}) (2 \leq p_k \leq 2 + \sqrt{3})$ et que A_{n+1} est inversible.

I.B - Calculs explicites

Notation : pour toute matrice M , on note $\det M$ son déterminant.

I.B.1) On pose $c_0 = 1$, $c_1 = 4$, $c_2 = 15$ et pour tout $n \geq 3$, $c_n = \det C_n$, $b_n = \det B_n$, $a_n = \det A_n$. Montrer que la suite $(c_n)_{n \geq 3}$ vérifie une relation de récurrence simple ; en déduire $(c_n)_{n \geq 3}$ puis $(b_n)_{n \geq 3}$ et $(a_n)_{n \geq 3}$.

I.B.2) En déduire que A_n est inversible.

I.B.3) Calculer explicitement les valeurs propres de A_3 et C_3 .

I.B.4) Localisation des valeurs propres.

a) Soit λ un réel tel que :

$$|\lambda - \alpha_1| > 1$$

$$|\lambda - \alpha_n| > 1$$

et, $\forall k \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad |\lambda - \alpha_k| > 2$.

Montrer qu'alors $M_n[\alpha_1, \dots, \alpha_n] - \lambda I$ est inversible.

b) En déduire que les valeurs propres de $M_n[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ appartiennent à la réunion des intervalles

$$[\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1] \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n-1} [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2] \right) \cup [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1]$$

et que A_n , B_n et C_n sont inversibles.

Partie II - Fonctions splines cubiques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $h = \frac{1}{n}$ et pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $x_k = \frac{k}{n}$.

On note S l'ensemble des fonctions (dites splines cubiques) de classe C^2 sur $[0, 1]$ telles que : $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ la restriction de s à $[x_i, x_{i+1}]$ est polynomiale de degré ≤ 3 .

II.A - Montrer que l'application :

$$S \rightarrow \mathbb{R}^{n+3}$$

$$s \mapsto \left(s(0), s'(0), s''(0), s_d^{(3)}(0), s_d^{(3)}\left(\frac{1}{n}\right), s_d^{(3)}\left(\frac{2}{n}\right), \dots, s_d^{(3)}\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

On rappelle que, si $x \in \mathbb{R}$, $s_d^{(3)}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{s''(x+t) - s''(x)}{t}$ désigne la dérivée à droite d'ordre 3 en x .

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel S ?

II.B - f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$.

II.B.1) Soit $(m_0, m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ la restriction de g à $[x_{i-1}, x_i]$ est polynomiale de degré ≤ 3 ,

(ii) $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ $g(x_i) = f(x_i)$,

(iii) $g''(0) = m_0$; $\lim_{x \rightarrow x_i} g''(x) = \lim_{x \rightarrow x_i} g''(x) = m_i$; $g''(1) = m_n$.

b) Établir que pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on a :

$$g(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + u_i(x - x_{i-1}) + v_i$$

où u_i et v_i sont des réels que l'on exprimera en fonction de $m_{i-1}, m_i, h, f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$.

II.B.2) Montrer que :

$$\begin{cases} g \in S \\ g'(0) = f'(0) \\ g'(1) = f'(1) \end{cases} \Leftrightarrow A_{n+1} M = B,$$

$$\text{où } M = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}, A_{n+1} = M_{n+1}[2, 4, \dots, 4, 2] \text{ selon les notations de la}$$

partie I, et B est une matrice colonne dépendant des $f(x_i), (i \in \{0, \dots, n-1\}), f'(0), f'(1)$ et h .

II.B.3) En déduire qu'il existe une et une seule fonction spline cubique $g \in S$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \dots, n\}, g(x_i) = f(x_i) \\ g'(0) = f'(0); g'(1) = f'(1) \end{cases}.$$

II.B.4) Retrouver la valeur de la dimension de S .

On peut montrer et on **admettra** ici que si f est de classe C^4 sur $[0, 1]$,

$$\|f - g\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \leq \frac{13}{8n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

II.C - Interpolation de Lagrange-Sylvester

II.C.1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale h , de degré $\leq n+2$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \dots, n\}, h(x_i) = f(x_i) \\ h'(0) = f'(0); h'(1) = f'(1) \end{cases}$$

II.C.2) On peut montrer, et on **admettra** ici que, si f est de classe C^{n+3} sur $[0, 1]$:

$$\|f - h\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{(n+3)}\|_{\infty}}{(n+3)!} \|M_n\|_{\infty} \quad \text{où} \quad M_n(x) = x(x-1) \prod_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right).$$

Comparer les deux méthodes d'approximation précédentes (splines cubiques et Lagrange-Sylvester) du double point de vue de la simplicité et de la précision, d'abord pour $n = 1$, puis pour $n \geq 2$.

Partie III - Un exemple de structure euclidienne

III.A - On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P, Q \in E$, on pose :

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i)$$

III.A.1) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire euclidien sur E . On notera $\|P\|_2$ la norme du polynôme P associée au produit scalaire précédent.

III.A.2) Montrer qu'il existe une unique famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ de E telle que :

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2 \quad L_i(j) = \delta_{i,j}$$

où la fonction δ désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Vérifier que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E . Elle sera notée $\mathcal{B}$. Que peut-on dire du degré du polynôme $X^n + (-1)^{n+1} n! L_0$?

III.A.3) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur N de E orthogonal (au sens du produit scalaire précédemment défini) à l'hyperplan H de E formé des polynômes de degré $\leq n-1$.

Si $P \in E$, on note

$$d(P, H) = \inf_{Q \in H} \|P - Q\|_2$$

la distance du polynôme P à l'hyperplan H .

Montrer que $d(X^n, H) = n! d(L_0, H)$.

III.A.4) En remarquant que : $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer

$$\sum_{p=0}^n (C_n^p)^2$$

à l'aide d'un seul coefficient binomial.

III.A.5) En déduire la valeur de $d(X^n, H)$.

III.B - Étude d'un endomorphisme de E

On note

$$\Pi(X) = \prod_{i=0}^n (X-i)$$

et on fixe un polynôme M_0 dans E .

On considère l'application φ de E dans E , qui à tout P de E associe le reste de la division euclidienne de $P \times M_0$ par Π .

III.B.1) Montrer que φ est un endomorphisme de E .

III.B.2) Exprimer $\varphi(L_i)$ en fonction de L_i . En déduire que φ est un endomorphisme autoadjoint de E .

III.B.3) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M_0 pour que φ soit un automorphisme orthogonal de E . Quelle est alors sa nature géométrique ?

III.B.4) On note $\mathcal{B}_{E(0,1)} = \{P \in E ; \|P\|_2 \leq 1\}$.

Exprimer

$$\min_{P \in \mathcal{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P) \quad \text{et} \quad \max_{P \in \mathcal{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P)$$

à l'aide des $M_0(i)$.

••• FIN •••
