

**Notations**

- On note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .
- Tout au long du sujet, un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  sera identifié à sa fonction polynomiale.
- Une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continue est dite intégrable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  converge.
- Pour une famille de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on appelle  $\text{vect}(P_n, n \in \mathbb{N})$  l'espace vectoriel engendré par cette famille, c'est à dire :

$$\text{vect}(P_n, n \in \mathbb{N}) = \left\{ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}, g = \sum_{k=0}^N a_k P_k \right\}$$

Le sujet illustre des applications du calcul de l'intégrale de Gauss dans différents domaines.

La partie I est consacrée au calcul de cette intégrale.

La partie II est consacrée à la résolution d'une équation différentielle du second ordre à l'aide des séries entières. Elle utilise le résultat final de la partie I. Elle est totalement indépendante des deux parties suivantes.

La partie III est consacrée à l'étude d'un endomorphisme autoadjoint de  $\mathbb{R}[X]$  et d'une suite de polynômes orthogonaux associés à cet endomorphisme. Elle est indépendante de la partie II.

La partie IV est consacrée à montrer des propriétés sur la famille de polynômes construite à la partie III. Le but est d'établir que c'est une famille totale d'un espace préhilbertien. Ce résultat est en fait un résultat général dans la théorie des espaces de Hilbert.

**I Partie I : Intégrale de Wallis et Intégrale de Gauss**

**I.A** — On définit  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ .

**Q 1.** Étudier la monotonie de la suite  $(W_n)$ .

**Q 2.** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ .

**Q 3.** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ .

**Q 4.** En déduire que  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .

**I.B** — On note  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$  et  $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

**Q 5.** Justifier l'existence de  $I$ .

**Q 6.** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = I$ .

**Q 7.** En utilisant le changement de variable  $x = \sqrt{n} \sin u$ , après avoir justifié qu'il est licite, montrer que pour tout  $n \geq 1$  :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

**Q 8.** En déduire la valeur de  $I$  puis de  $J$ .

## II Partie II : Autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle définie sur  $\mathbb{R}[X]$  par

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (\text{II.1})$$

**II.A –**

**Q 9.** Déterminer les solutions développables en série entière de II.1 sur  $\mathbb{R}[X]$ .

**Q 10.** Démontrer qu'il existe une unique solution développable en série entière, notée  $S$ , telle que  $S(0) = 1$ .

**II.B –** On définit,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(t)) dt$ .

**Q 11.** Montrer que  $G$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 12.** Montrer que  $G$  est solution de II.1 sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 13.** Montrer que  $G = S$ .

## III Partie III : Étude d'un endomorphisme sur un espace préhilbertien

**III.A – Les polynômes d'Hermite.**

On note  $w$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $w(x) = e^{-x^2}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $H_n$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$ , où  $w^{(n)}$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $w$ .

En particulier :  $H_0(x) = 1$ .

**Q 14.** Calculer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $H_1(x)$ ,  $H_2(x)$ ,  $H_3(x)$ .

**Q 15.** Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$

**Q 16.** En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n$  est un polynôme de degré  $n$  dont vous déterminerez la parité.

**Q 17.** Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le coefficient dominant de  $H_n$ .

**III.B – Un produit scalaire.**

On note  $E$  l'ensemble des applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continues et telles que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) e^{-x^2} dx$  converge.

**Q 18.** Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel contenant  $\mathbb{R}[X]$ .

**Q 19.** On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'application de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tout  $(f, g) \in E^2$  associe  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$ .

Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

On notera  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

### III.C – Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

**Q 20.** Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  :

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \langle P, H_n \rangle,$$

**Q 21.** En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] : (P | H_n) = 0$ .

**Q 22.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(H_0, \dots, H_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q 23.** Montrer :  $\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle$ .

**Q 24.** En déduire la valeur de  $\|H_n\|$ .

### III.D – Étude d'un endomorphisme autoadjoint

On note  $u, v, w$  les applications définies de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , par :

$$u(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad v(P) = 2XP - P', \quad w(P) = P'.$$

**Q 25.** Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $u$ .

Par la suite, on notera  $u_n$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On admet que  $v$  et  $w$  sont aussi des endomorphismes de  $\mathbb{R}[X]$ , et on note  $\text{Id}$  l'application identique de  $\mathbb{R}[X]$ .

**Q 26.** Etablir :  $v \circ w = u - \text{Id}$  et  $w \circ v = u + \text{Id}$ .

**Q 27.** En déduire :  $u \circ v - v \circ u = 2v$ .

**Q 28.** Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , si  $u(P) = \lambda P$ , alors  $u(v(P)) = (\lambda + 2)v(P)$ .

**Q 29.** Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $H_k$  est un vecteur propre de  $u$  et déterminer la valeur propre associée.

**Q 30.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que  $u_n$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 31.** Établir, pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$  :

$$\langle P', Q' \rangle = \langle u(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q 32.** Montrer que  $u_n$  est un endomorphisme autoadjoint de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Q 33.** Justifier, d'une deuxième manière, que  $u_n$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}_n[X]$  formée de vecteurs propres de  $u_n$ .

**Q 34.** Donner une base orthonormale de  $\mathbb{R}_n[X]$  constituée de vecteurs propres de  $u_n$ .

## IV Partie IV : Une famille totale

Dans cette partie, nous conservons les notations de la partie III. L'espace  $E$  muni de son produit scalaire et la famille  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  précédemment construite. Nous allons montrer que  $(\text{vect}(H_n, n \in \mathbb{N}))^\perp = \{0\}$ . On dit dans ce cas là que la famille  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale dans l'espace préhilbertien  $E$  ou encore que c'est une base hilbertienne de  $E$ .

**Q 35.** Soit  $\xi \in \mathbb{R}$ . Pour  $\xi \in E$ , montrer que  $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

On pourra écrire  $f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2} = f(x)e^{-x^2/2}e^{-ix\xi}e^{-x^2/2}$ .

On définit ainsi

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} e^{-t^2} dt.$$

$\mathcal{F}$  est une application linéaire sur  $E$ , appelée la transformation de Fourier de  $f$  sur l'espace préhilbertien  $E$ . Nous admettrons pour la suite que  $\mathcal{F}$  est injective sur  $E$ .

**Q 36.** Montrer que, pour tout entier naturel  $p$ , la fonction  $x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \exp(-x^2) dx$ . Déterminer la valeur de  $M_p$ .

**Q 37.** Soit  $f \in E$ . Justifier que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} dx$$

**Q 38.** Montrer que  $\mathcal{F}(f)$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

Dans la suite de la partie, on suppose que  $f \in (\text{vect}(\mathbf{H}_n, n \in \mathbb{N}))^\perp$ . Le but est de montrer que  $f$  est la fonction nulle.

**Q 39.** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-x^2} dx = 0$ .

**Q 40.** En déduire que  $\mathcal{F}(f)$  est la fonction nulle.

**Q 41.** Conclure.

---

• • • FIN • • •

---