



Attribution d'une valeur à des séries divergentes

Le 23 février 1913 Srinivasa Ramanujan écrivit une lettre au mathématicien Godfrey Hardy dans laquelle il présenta une théorie selon laquelle la somme infinie $1 + 2 + \dots + n + \dots$ vaut $-\frac{1}{12}$. S'en est suivi tout un ensemble de recherches sur ce sujet...

L'objectif de ce problème est de présenter quelques situations où l'on attribue une valeur finie à "une somme infinie". On s'intéresse en particulier au cas de la série de terme général n . Dans la première partie sont présentées deux situations qui dans les deux cas font apparaître la valeur $-\frac{1}{12}$, ce qui montre que cette valeur ne semble pas être fortuite. La deuxième partie traite plus particulièrement de la façon dont Ramanujan a étudié les sommes infinies en s'appuyant sur la formule de Euler-Maclaurin. La valeur qu'il octroie à ces sommes étant en quelque sorte un terme de compensation entre une somme et une intégrale. Enfin la troisième partie consiste à établir des développements dits tayloriens généralisés.

Notations et définition

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ la partie entière de x . On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier qui satisfait $x - 1 < [x] \leq x$.

On dira qu'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ est à support compact dans $\mathbb{R}^+$ lorsqu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que pour tout $t \geq K$, $\varphi(t) = 0$.

Partie A – Deux approches pour une valeur à $1+2+\dots+n+\dots$

I – Une première approche

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Q1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer $f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Q2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Q3. À l'aide de développements limités en 0, déterminer trois constantes réelles a , b et c telles qu'au voisinage de 0

$$\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c + o(1).$$

Q4. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} - \frac{1}{x^2} \right)$.

II – Une deuxième approche

On considère dans cette partie une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$ et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit $K > 0$ telle que φ soit nulle sur $[K, +\infty[$. On pose ψ la fonction telle que pour tout $t \geq 0$, $\psi(t) = t\varphi(t)$. On peut alors observer que ψ ainsi que toutes ses dérivées sont nulles sur $[K, +\infty[$.

II.1 – Une généralisation du théorème des sommes de Riemann pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dans cette sous-partie f désigne une fonction définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ et x est un réel strictement positif.

Q5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $a + nx \in]a, b]$.

Q6. Montrer que pour tout $L \geq 0$, $|L - \lfloor \frac{L}{x} \rfloor x| \leq x$.

Q7. Montrer que $x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a + nx) - \int_a^b f(t) dt = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a + nx) - f(t) dt \right) - \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b f(t) dt$.

Q8. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a + nx) = \int_a^b f(t) dt$.

II.2 – Un développement asymptotique lorsque x tend vers 0 de $\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx)$

Soit x un réel strictement positif.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $R_{k,l}(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_{nx}^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(s) ds \right) dt$. On admet la formule de Taylor avec reste intégral : pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , pour tout $a \in I$, pour tout $b \in I$, $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

Q9. Déterminer $\int_0^K \psi'(t) dt$ ainsi que $\int_0^K \psi''(t) dt$.

Q10. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} nx\varphi(nx)$ ainsi que les valeurs de $\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx)$ et de $\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx)$.

Q11. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geq 0$, $\psi^{(l)}(t) = \int_K^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(l+k+1)}(s) ds$.

Q12. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi^{(l)}(t) dt = 0$.

Q13. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_{k,l}(x)}{x^k} = 0$.

Q14. Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi^{(l)}(t) - \psi^{(l)}(nx) dt = \sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(nx) dt \right) + R_{p,l+1}(x).$$

Q15. En déduire que

$$\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) + \frac{x}{6} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}.$$

Q16. Montrer que $x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi'(nx) - \psi'(t) dt - \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi'(t) dt$.

Q17. En déduire que $\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) - \frac{R_{1,2}(x)}{x} - \frac{1}{x} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi'(t) dt$.

Q18. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt$.

Q19. Montrer que $\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n\varphi(nx) = \frac{1}{x^2} \int_0^K \psi(t) dt - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt \right) - \frac{1}{x^2} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi(t) dt$.

Q20. En déduire que qu'il existe un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx) = \frac{A}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)$.

Partie B – Les sommes infinies au sens de Ramanujan

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

I – La formule d'Euler-Maclaurin

On considère la famille de polynômes $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de sorte que $B_0 = 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B'_p = pB_{p-1}$ et $\int_0^1 B_p(x) dx = 0$.

On admet dans cette partie l'existence et l'unicité des polynômes B_p . On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_p = B_p(0)$ et $\tilde{B}_p$ la fonction 1-périodique de sorte que $\tilde{B}_p$ soit égale à B_p sur $[0, 1[$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{B}_p(x) = B_p(x - \lfloor x \rfloor)$.

On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $r_{p,a} = \int_1^a \frac{\tilde{B}_p(t)}{p!} f^{(p)}(t) dt$.

Q21. Déterminer B_1 et B_2 .

Q22. Montrer que pour tout entier naturel p , $B_p(1 - X) = (-1)^p B_p(X)$.

Q23. Montrer que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, $b_p = B_p(1)$ et pour tout $p \geq 3$ impair $b_p = 0$.

Q24. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!} \tilde{B}_p(t) dt = \frac{B_{p+1}(1)f^{(p)}(k+1) - B_{p+1}(0)f^{(p)}(k)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{\tilde{B}_{p+1}(t)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

Q25. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f(1) + \dots + f(n) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(1) + f(n)}{2} + r_{1,n}.$$

Q26. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(1) + \dots + f(n) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \sum_{l=1}^p \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1) \right) + r_{2p+1,n}.$$

II – La constante de Ramanujan

On suppose dans cette partie qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq q$, $f^{(2p+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $f^{(2p+1)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. On pose, **sous réserve d'existence**,

$$C_0 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} \tilde{B}_1(t) f'(t) dt \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N}^*,$$

$$C_p = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt - \sum_{l=1}^p \frac{b_{2l}}{(2l)!} f^{(2l-1)}(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t) dt.$$

Q27. Montrer pour tout $p \geq q$ que C_p est bien définie et ne dépend pas de l'entier p . On note à présent $\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} f(k)$ la valeur de C_p , où $p \geq q$.

Q28. Déterminer $\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} 1$ ainsi que $\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} k$ et $\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} k^2$.

Q29. On suppose dans cette question que $q = 0$ et que la suite $(f(n))$ converge vers 0. Montrer que

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k \geq 1}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt \right). \text{ Qu'obtient-on si } \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge?}$$

Partie C – Développement tayloriens généralisés

On note E l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme. Si $g \in E$, on note $\|g\|_{\infty}$ la norme uniforme de g sur E . On admettra qu'une forme linéaire φ est continue sur E si et seulement si il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $g \in E$, $|\varphi(g)| \leq C\|g\|_{\infty}$.

On considère φ une forme linéaire continue sur E vérifiant $\varphi(t \mapsto 1) = 1$. Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P'_n = nP_{n-1}$ et $\varphi(P_n) = 0$. On pose de plus, sous réserve d'existence, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_k(x)}{k!} t^k$. f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

I – Les formules de Taylor généralisés

Q30. Montrer que la suite (P_n) existe bien et est unique.

Q31. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|P_{n+1}\|_{\infty} \leq (n+1)(1+C)\|P_n\|_{\infty}$.

Q32. Montrer qu'il existe $R > 0$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \in]-R, R[$, $S(x,t)$ existe.

Q33. Montrer que pour tout $t \in]-R, R[$, $x \mapsto S(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Q34. Montrer que pour tout $t \in]-R, R[$ il existe un réel $\alpha(t)$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $S(x,t) = \alpha(t)e^{tx}$.

Q35. Montrer que pour tout $t \in]-R, R[$, $\varphi(x \mapsto S(x,t)) = 1$. En déduire la valeur de $\alpha(t)$.

Q36. Justifier que la famille de polynômes (B_n) définie en B-I existe et est unique et montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $g : t \mapsto \begin{cases} \frac{te^{tx}}{e^t - 1} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que ce développement est $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k$.

Q37. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^p \left(\frac{P_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{P_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right) + \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

Q38. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(x)}{k!} \varphi \left(y \mapsto f^{(k)}(y) \right) + \varphi \left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right).$$

Q39. Justifier que l'application linéaire $\varphi : g \mapsto g(0)$ est continue sur E . Qu'obtient-on pour cette application?

Q40. Soit $j \in \mathbb{N}$. À l'aide de la fonction $x \mapsto f(x+j)$ montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(j) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(0)}{k!} \varphi \left(y \mapsto f^{(k)}(y+j) \right) - \varphi \left(y \mapsto \int_j^{y+j} \frac{P_p(y-t+j)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right).$$

II – Formule d'Euler-Boole

Dans la suite φ est définie par, pour tout $g \in E$, $\varphi(g) = \frac{1}{2}(g(0) + g(1))$. Les polynômes P_n sont alors notés E_n et sont appelés polynômes d'Euler. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = E_n(0)$.

Q41. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in]-R, R[$, pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E_k(x)}{k!} t^k$.

Q42. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n(1 - X) = (-1)^n E_n(X)$.

Q43. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(j) = \sum_{k=0}^p \left(\frac{1}{2} (f^{(k)}(j) + f^{(k)}(j+1)) \frac{e_k}{k!} \right) - \frac{1}{2} \int_j^{j+1} \frac{(-1)^p E_p(t-j)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

Q44. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{E}_n(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor + n} E_n(x - \lfloor x \rfloor)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(1) - f(2) + \cdots (-1)^{n-1} f(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p f^{(k)}(1) \frac{e_k}{k!} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{k=0}^p f^{(k)}(n+1) \frac{e_k}{k!} + \frac{1}{2} \int_1^{n+1} \frac{\widetilde{E}_p(t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

◇ Fin ◇

