

Horloge atomique

De nos jours, les horloges les plus précises sont des étalons atomiques de fréquence. Depuis 1967, la seconde est ainsi définie à partir de la résonance hyperfine du niveau fondamental de l'atome de césium 133, fixée à 9 192 631 770 Hz. Les meilleurs étalons primaires de fréquence, des horloges de type fontaine atomique, atteignent des exactitudes en fréquence relative de l'ordre de quelques 10^{-16} . Leur architecture, imaginée dès les années 1950, n'a pu voir le jour que grâce aux techniques de refroidissement des atomes par laser développées à la fin des années 1980.

Ce problème comprend quatre parties largement indépendantes.

I Ralentissement des atomes par laser

Dans cette partie, on étudie le ralentissement d'un jet d'atomes (de césium 133 ou de rubidium 87) par un faisceau laser se propageant dans la même direction que les atomes mais en sens opposé. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire donnant la direction et le sens de propagation du laser. La longueur d'onde λ du laser est choisie de sorte que les atomes puissent absorber des photons du laser.

I.A – Force exercée par le laser sur les atomes

On suppose que l'intensité du laser est assez importante pour que le modèle proposé dans la suite décrive correctement l'interaction entre le laser et les atomes. Un atome dans l'état fondamental qui se situe dans le faisceau laser absorbe un photon quasi-instantanément. L'atome reste alors excité pendant une durée moyenne notée τ , puis il se désexcite en émettant un photon dans une direction aléatoire. En moyenne, les photons réémis ne modifient donc pas la quantité de mouvement de l'atome : seuls les photons absorbés contribuent à ralentir les atomes.

I.A.1) Les photons constituant le faisceau laser sont tous identiques, ils possèdent une quantité de mouvement dont la norme est égale à la constante de Planck h divisée par la longueur d'onde λ . Déterminer l'unité de la constante de Planck h en fonction des unités de base du Système International.

I.A.2) Lors de l'absorption d'un photon par un atome, l'ensemble {atome + photon} peut être considéré comme un système isolé. Quelle relation existe-t-il entre la quantité de mouvement de l'atome après l'absorption et sa quantité de mouvement avant l'absorption ?

I.A.3) Déterminer la variation moyenne $\delta\vec{p}$ de la quantité de mouvement d'un atome qui se situe dans le faisceau laser pendant une durée δt très supérieure à τ .

I.A.4) En déduire l'expression de la force moyenne $\vec{F}$ exercée par le laser sur un atome en fonction de h , λ , τ et $\vec{u}$.

I.A.5) Pour le rubidium 87 on a $\lambda \simeq 0,8 \mu\text{m}$ et $\tau \simeq 0,5 \mu\text{s}$. Déterminer l'ordre de grandeur de la norme a de l'accélération subie par un atome dans le faisceau laser. Calculer numériquement le rapport de l'accélération a et de l'accélération de la pesanteur, $g \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, commenter.

I.B – Distance nécessaire pour arrêter les atomes

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, les atomes (de rubidium ou de césium) sortent du four à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. À partir de la position $x = 0$, ils sont soumis à une accélération constante $\vec{a} = -a \vec{e}_x$. Le poids étant négligeable, le mouvement des atomes est rectiligne. On considère un atome qui passe en $x = 0$ à l'instant $t = 0$, on note $x(t)$ sa position et $v(t)$ sa vitesse suivant $\vec{e}_x$. L'objectif de cette question est de déterminer la distance nécessaire pour arrêter l'atome.

I.B.1) Déterminer $v(t)$, en déduire la coordonnée $x(t)$.

I.B.2) Déterminer les expressions de la durée T du trajet ainsi que la longueur L nécessaire pour que l'atome soit arrêté.

I.B.3) On suppose que les atomes présents dans le four et ceux qui viennent juste d'en sortir sont à l'équilibre thermodynamique. Sachant que le four est porté à 120°C , déterminer numériquement la vitesse quadratique moyenne à la sortie du four pour le césium et pour le rubidium.

I.B.4) En prenant v_0 égale à la vitesse quadratique moyenne à la sortie du four, déterminer l'ordre de grandeur de T et de L (on prendra $a \simeq 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

I.C – Changement de fréquence du laser

Dans cette question, nous allons montrer que la fréquence du laser « vue » par l'atome varie lorsque la vitesse de ce dernier est modifiée. On appelle $\mathcal{R}$ le référentiel du laboratoire, on note x la coordonnée cartésienne suivant $\vec{e}_x$ dans $\mathcal{R}$. On appelle $\mathcal{R}'$ un référentiel en translation par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$, on note x' la coordonnée cartésienne suivant $\vec{e}'_x = \vec{e}_x$ dans $\mathcal{R}'$. À l'instant $t = 0$, on a $x' = x$ (les origines des repères associés à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident).

I.C.1) Déterminer l'expression de x' en fonction de x , v et du temps t dans le cadre de la relativité galiléenne.

I.C.2) On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant dans le sens des x **décroissants**. On note f sa fréquence et λ sa longueur d'onde dans le référentiel $\mathcal{R}$. Écrire l'expression de la phase ϕ de cette onde en fonction de x , t , f et λ .

I.C.3) On considère cette même onde dans le référentiel $\mathcal{R}'$, on note f' sa fréquence et λ' sa longueur d'onde dans $\mathcal{R}'$. En supposant que la phase ϕ est invariante par changement de référentiel, déterminer l'expression de la fréquence f en fonction de f' , λ' et v .

I.C.4) Avec $v > 0$, dans quel référentiel la fréquence de l'onde est-elle la plus élevée ? Donner une interprétation simple de ce résultat.

I.C.5) En utilisant la relation de dispersion dans le vide, exprimer f en fonction de f' , de v et de c , célérité de la lumière dans le vide. On constate que la fréquence de l'onde dépend de la vitesse v , comment nomme-t-on cet effet ?

I.C.6) Une approche totalement cohérente de ce problème nécessite l'utilisation de la relativité restreinte. Vérifier que, au premier ordre en v/c , la formule relativiste

$$f = f' \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

redonne bien la formule obtenue dans la question précédente.

I.D – Chirp cooling

Pour résoudre le problème posé par l'effet mis en évidence dans la question précédente sur le ralentissement des atomes, nous allons étudier une solution appelée « chirp cooling ». On note f_0 la fréquence de résonance correspondant à l'absorption d'un photon par un atome sur la transition utilisée pour le ralentissement. Pour qu'un photon soit absorbé, sa fréquence f' dans le référentiel de l'atome doit donc être égale à f_0 .

I.D.1) Montrer que, pour pouvoir arrêter le plus rapidement possible un atome qui passe en $x = 0$ à l'instant $t = 0$, la fréquence f (dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire) du laser ralentisseur doit dépendre du temps de la manière suivante :

$$f(t) = f_0 + f_0 \frac{v_0}{c} \left(\frac{t}{T} - 1 \right)$$

où v_0 est la vitesse initiale de l'atome et T est le temps mis pour arrêter complètement l'atome.

I.D.2) Que se passe-t-il si la fréquence varie plus rapidement que dans la question précédente ? Que se passe-t-il si la fréquence varie moins rapidement ?

I.D.3) On note Δf l'excursion en fréquence nécessaire pour arrêter un atome qui sort du four à la vitesse $v_0 \simeq 3 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminer numériquement l'excursion relative en fréquence $\Delta f/f_0$ du laser ralentisseur, en déduire son excursion relative en longueur d'onde $\Delta \lambda/\lambda_0$.

I.D.4) Pour le rubidium, la longueur d'onde de résonance est $\lambda_0 = 780 \text{ nm}$. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette résonance ? Calculer numériquement la fréquence de résonance f_0 et l'excursion en fréquence Δf . Calculer, en joule puis en électron-volt, la différence d'énergie entre les niveaux utilisés pour ralentir les atomes de rubidium.

I.D.5) L'atome soumis à l'onde électromagnétique du laser peut être modélisé comme un oscillateur harmonique soumis à une excitation sinusoïdale. Le pic de la résonance en fréquence a une largeur totale à mi-hauteur $\delta f = 5,9 \text{ MHz}$. Déterminer l'ordre de grandeur du facteur de qualité de cet oscillateur. Déterminer la largeur totale à mi-hauteur du pic de résonance en longueur d'onde $\delta \lambda$, cette valeur vous semble-t-elle surprenante ?

II Les alcalins

II.A – Propriétés des alcalins

Les alcalins, formant la première colonne de la classification périodique, doivent leur nom à leur réaction quantitative et violente sur l'eau qui conduit à la formation d'une solution basique et de dihydrogène. Le césium (Cs) et le rubidium (Rb) sont deux éléments de cette famille.

II.A.1) Citer deux autres alcalins.

II.A.2) L'hydrogène, situé dans la première colonne de la classification, n'est pas considéré comme un alcalin. Donner une propriété distinguant l'hydrogène des alcalins.

II.A.3) Donner un argument justifiant la différence entre l'enthalpie de première ionisation et l'enthalpie de deuxième ionisation des alcalins. On s'appuiera sur les valeurs données pour Cs et Rb.

II.A.4) Quel est l'ion le plus stable d'un alcalin M ? Pourquoi ? Quel est le type de liaison que vont former les alcalins ?

II.A.5) Cet ion est stable dans l'eau. Écrire la réaction entre une mole du métal alcalin M et l'eau. Quelle est la nature de cette réaction ?

II.B – Cristallographie

II.B.1) Le césium et le rubidium métalliques solides possèdent une structure cristalline cubique centrée. Quel est la coordinence de la structure ? Exprimer sa compacité C et la calculer. C est-elle maximale ?

II.B.2) Exprimer le paramètre de maille a_{Cs} puis le rayon atomique r_{Cs} du césium en fonction de la masse volumique μ_{Cs} , de la masse molaire M_{Cs} et du nombre d'Avogadro N_A . Application numérique.

II.B.3) Calculer le rayon atomique du rubidium r_{Rb} . Est-ce conforme à la position relative des éléments Rb et Cs dans la classification périodique, déduite des numéros atomiques ?

II.C – Extraction liquide-liquide

Un soluté S est soluble dans deux solvants, l'un organique, l'autre aqueux. On notera avec les indices org et aq les grandeurs relatives respectivement au solvant organique et au solvant aqueux. Les deux solvants ne sont pas miscibles et forment deux phases, la phase organique surnageant sur la phase aqueuse. V_{org} est le volume de la phase organique, V_{aq} celui de la phase aqueuse (**figure 1**).

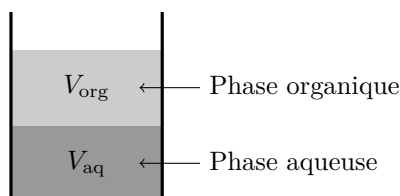


Figure 1

Le soluté S peut migrer entre les phases. Il s'établit alors l'équilibre $S_{\text{aq}} = S_{\text{org}}$, de constante K_{ex} , appelée constante d'extraction.

II.C.1) Soient a_S l'activité, μ_S le potentiel chimique et μ_S° le potentiel chimique standard du soluté S en solution, à une température T donnée. Donner la relation entre a_S , μ_S , μ_S° , R et T . Si le soluté S est en équilibre entre les deux phases, quelle relation existe-t-il entre les potentiels chimiques $\mu_{S_{\text{aq}}}$ et $\mu_{S_{\text{org}}}$? En déduire l'expression de la constante d'extraction K_{ex} en fonction de $\mu_{S_{\text{aq}}}^\circ$, $\mu_{S_{\text{org}}}^\circ$, R et T .

Dans toute la suite du problème, on fait l'hypothèse que les solutions sont suffisamment diluées pour que les activités soient identifiées aux concentrations.

II.C.2) Initialement, S est uniquement présent dans la phase aqueuse, en quantité N_0 (exprimée en mole). Quelle est la quantité maximale N du soluté S que l'on peut obtenir dans la phase organique ? On écrira N sous la forme $N = N_0/(1 + \alpha)$ et on exprimera α en fonction de K_{ex} , V_{org} et V_{aq} . A.N. Pour $K_{\text{ex}} = 1,0 \times 10^{-5}$, calculer numériquement le rapport des volumes $V_{\text{org}}/V_{\text{aq}}$ permettant d'extraire 99% du soluté de la phase aqueuse ? Commenter.

La constante d'extraction est en général très faible pour des composés comme les thiocyanates alcalins $\text{M}(\text{SCN})$. Pour augmenter l'efficacité de l'extraction, on utilise les propriétés complexantes de ligands organiques, tels les calixarènes. Le solvant organique (dichloroéthane) contient en solution le ligand, neutre, noté L , susceptible de former un complexe avec le thiocyanate alcalin $\text{M}(\text{SCN})_{\text{org}}$, selon la réaction, de constante K_f :



Le ligand L est insoluble dans la phase aqueuse.

II.C.3) Exprimer, à l'équilibre entre les deux phases, la quantité totale N' de thiocyanate alcalin extraite de la phase aqueuse, en fonction de N_0 , K_f , $[L_{\text{org}}]$, n et α . Montrer que la présence du ligand revient à remplacer la constante d'extraction K_{ex} par une nouvelle constante K'_{ex} . A.N. Pour $K_f = 10^{8,5}$, $n = 1$ et des volumes V_{aq} et V_{org} égaux, calculer numériquement la concentration du ligand $[L_{\text{org}}]$ pour extraire 99% du thiocyanate alcalin ? Commenter.

II.D – Stœchiométrie de la complexation

On se propose de déterminer expérimentalement la valeur de l'indice de complexation n pour le complexe du rubidium. Le mode opératoire est le suivant :

- On dissout une quantité fixée de thiocyanate de rubidium dans un volume V d'eau distillée. La concentration du soluté $\text{Rb}(\text{SCN})_{\text{aq}}$ est $c_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- La solution précédente est mise en contact avec un volume V d'une solution organique contenant une concentration initiale c_{L_0} de ligand L_{org} . Les deux volumes sont identiques.
- Après agitation, on laisse décanter le mélange puis on mesure la concentration du complexe $L_n\text{Rb}(\text{SCN})_{\text{org}}$ dans la solution organique.
- Le protocole est répété plusieurs fois, en conservant la concentration c_0 mais en changeant à chaque fois la concentration c_{L_0} .

II.D.1) Montrer qu'à l'équilibre la concentration de $\text{Rb}(\text{SCN})_{\text{org}}$ dans le solvant organique est indépendante de c_{L_0} si $c_{L_0} \ll c_0$.

II.D.2) On note $x = [L_n\text{Rb}(\text{SCN})]_{\text{org}}$. En déduire que $\log_{10}(x)$ est une fonction affine de $\log_{10}(c_{L_0} - nx)$, de pente n (où $\log_{10}$ désigne le logarithme de base 10).

II.D.3) Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

$c_{L_0} \text{ (mol} \cdot \text{L}^{-1}\text{)}$	$9,60 \times 10^{-5}$	$2,60 \times 10^{-4}$	$6,80 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-3}$
$x \text{ (mol} \cdot \text{L}^{-1}\text{)}$	$3,98 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$2,82 \times 10^{-4}$	$3,98 \times 10^{-4}$

Vérifier graphiquement que la valeur $n = 1$ est compatible avec les valeurs expérimentales. On placera les points sur un graphe où les axes seront les suivants :

- en abscisse, $\log_{10}(c_{L_0} - nx)$ de -5 à -3 (3 cm par unité de $\log_{10}$) ;
- en ordonnée, $\log_{10}(x)$, de -5 à -3 (3 cm par unité de $\log_{10}$).

Dans toute la suite du problème, on prendra $n = 1$.

II.E – Extraction par membrane liquide

Dans ce processus, trois phases liquides sont présentes, une phase organique (chloroforme) séparant deux phases aqueuses I et II (**figure 2**). Les interfaces entre phases sont de même aire Σ .

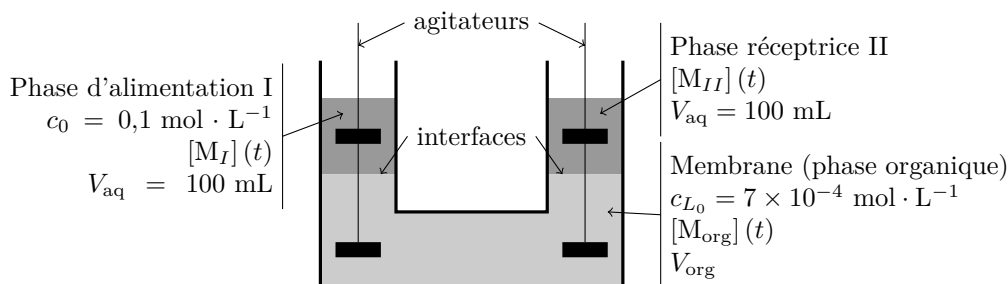


Figure 2

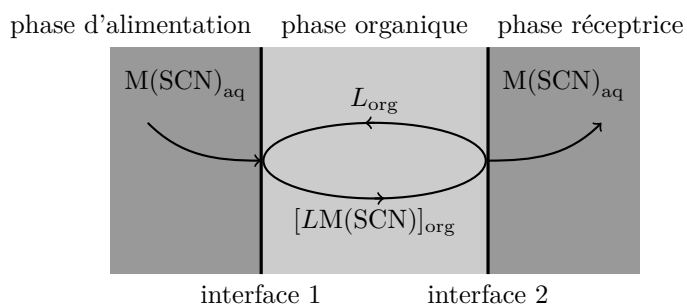


Figure 3

La phase aqueuse I est la phase d'alimentation, de volume $V_{\text{aq}} = 100 \text{ mL}$. Elle contient le thiocyanate alcalin $\text{M}(\text{SCN})_{\text{aq}}$ à la concentration initiale $c_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. La phase aqueuse II est la phase réceptrice. Elle est constituée au départ d'eau distillée. Son volume est V_{aq} . La phase organique forme la « membrane » liquide, de volume $V_{\text{org}} = 160 \text{ mL}$. Elle contient le ligand L_{org} à la concentration initiale $c_{L_0} = 7 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le ligand L_{org} et le complexe $\text{LM}(\text{SCN})_{\text{org}}$ sont considérés ici insolubles dans les phases aqueuses. On négligera le thiocyanate alcalin dans la phase organique : $[\text{M}(\text{SCN})_{\text{org}}] \simeq 0$.

II.E.1) Soit c la concentration d'un soluté, $\vec{j}$ le vecteur densité de courant de particules de ce soluté et D le coefficient de diffusion du soluté. Rappeler la loi phénoménologique de Fick de la diffusion. Quelles sont des unités S.I. possibles pour $\|\vec{j}\|$ et D ? La valeur de D dépend-elle de la nature du solvant pour un soluté donné?

II.E.2) On suppose qu'il n'y a pas d'accumulation de matière aux interfaces. Par conservation d'une entité que l'on précisera, établir la relation entre les vecteurs $\vec{j}_{M(SCN)}$ et $\vec{j}_{LM(SCN)}$ à chacune des interfaces (**figure 4**). Dédurre de **l'équation II.1** la relation entre $\vec{j}_L$ et $\vec{j}_{M(SCN)}$ à chaque interface.

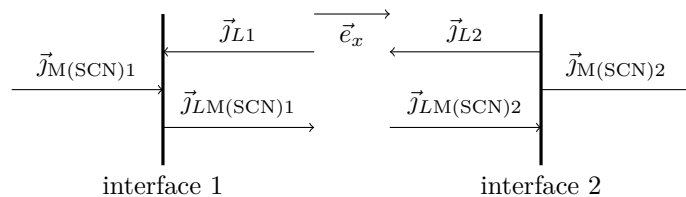


Figure 4

On note les concentrations des espèces contenant le métal alcalin $[M_I](t)$ dans la phase I, $[M_{II}](t)$ dans la phase II (le thiocyanate $M(SCN)_{aq}$) et $[M_{org}](t)$ (le complexe $LM(SCN)_{org}$), loin des interfaces. On admet que $[LM(SCN)_{org}](int_1) = c_1$ et $[LM(SCN)_{org}](int_2) = 0$, où c_1 est une constante pour une durée limitée $0 < t < T$.

II.E.3) L'agitation mécanique permet d'homogénéiser les concentrations dans chacune des trois phases. En conséquence, les gradients de concentration sont localisés sur une épaisseur δ faible devant les échelles du système, de part et d'autre des interfaces (**figure 5**). Montrer que $\vec{j}_{LM(SCN)1}$ peut s'y exprimer sous la forme approchée $\vec{j}_{LM(SCN)1} = -D'(c(\delta) - c(0))\vec{e}_x$ et donner l'expression de D' en fonction de D et δ . Quel rôle physique peut-on donner au signe moins devant D' ?

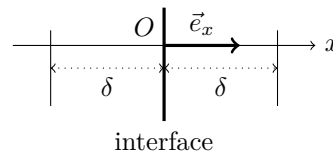


Figure 5

II.E.4) Par souci de simplicité, D' sera pris par la suite identique dans tous les solvants. Montrer qu'alors l'évolution des concentrations forme le système suivant, pour $0 < t < T$:

$$\frac{d[M_I]}{dt} = -k(c_1 - [M_{org}]) \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{d[M_{org}]}{dt} = k'(c_1 - 2[M_{org}]) \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{d[M_{II}]}{dt} = k[M_{org}] \quad (\text{II.4})$$

et exprimer k et k' en fonction de D' , coefficient de diffusion du complexe, Σ , V_{org} et V_{aq} . Donner les dimensions de k et k' . Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $[L_{org}](t)$ seule ?

II.E.5) Donner la solution de **l'équation II.3** et de **l'équation II.4** pour $0 < t < T$.

II.E.6) Associer, en le justifiant, les courbes (a), (b) et (c) de la **figure 6** à l'espèce chimique concernée, parmi M_I , M_{II} , M_{org} ou L_{org} .

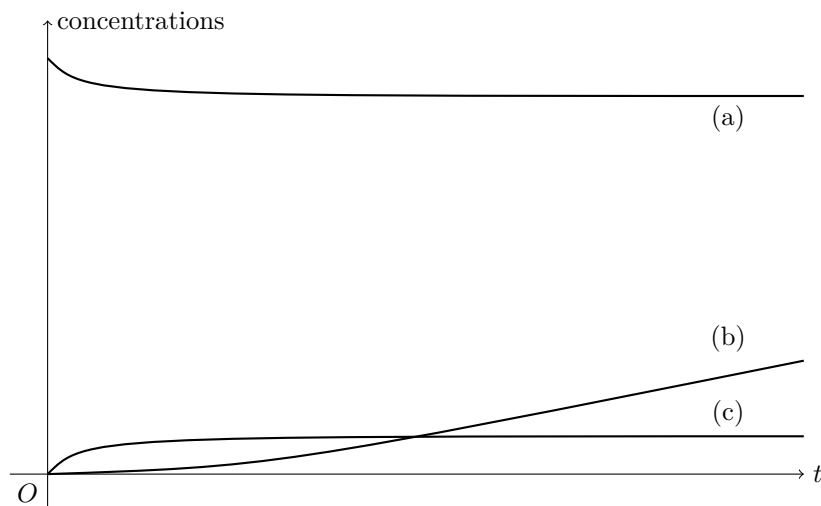


Figure 6

II.E.7) La vitesse de transfert v est définie par la pente de l'asymptote à t grand de la courbe (b). Déterminer numériquement les vitesses de transfert (dont on donnera l'unité) pour le rubidium et le césium :

	Rb	Cs
k (u S.I.)	$5,56 \times 10^{-4}$	$5,09 \times 10^{-4}$
c_1 ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	$1,03 \times 10^{-5}$	$2,72 \times 10^{-5}$

On considère une phase d'alimentation aqueuse contenant les ions rubidium et césium en concentrations égales $c_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

II.E.8) Au bout d'un temps assez long ($t \gg T$) pour que l'équilibre soit atteint entre les trois phases (saturation des solutions), quelles sont les concentrations $[\text{Rb}_{II}]$ et $[\text{Cs}_{II}]$ dans la phase réceptrice ? On pourra se contenter de donner une valeur approchée, en justifiant l'approximation.

II.E.9) Les vitesses de transfert restent celles de la **question II.E.7**. Si l'on veut enrichir la solution en rubidium, quel est l'ordre de grandeur de la durée durant laquelle la phase réceptrice reste en contact avec la membrane ? Comment pourrait-on procéder pour éviter la saturation ?

III Principe de l'horloge atomique à césium

III.A – Principe de l'interrogation de Ramsey

L'interrogation de Ramsey consiste à appliquer aux atomes deux excitations de faible durée τ dans des cavités électromagnétiques, espacées d'une durée longue T durant laquelle les atomes volent librement. Dans le modèle mécanique présenté ici, on considère un oscillateur de pulsation propre $\delta\omega$, constitué d'une masse m liée à un ressort horizontal de raideur k , de masse négligeable, et de longueur à vide ℓ_0 . On néglige toute force de frottement sur la masse. On note x l'abscisse de la masse m , l'origine étant prise à la position d'équilibre (**figure 7**).

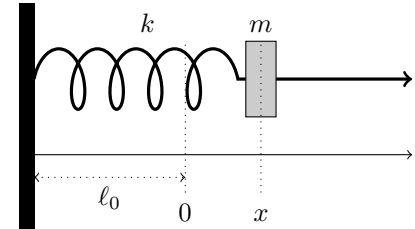


Figure 7

III.A.1) À partir de l'instant initial $t = 0$ où la masse est au repos jusqu'à l'instant τ , la masse m est soumise à une force horizontale $\vec{F} = m\omega_1^2 A_0 \cos(\omega_1 t) \vec{e}_x$. On prendra $\omega_1 \tau = \pi$ et $\delta\omega \tau \ll 1$. Établir l'équation du mouvement en $x(t)$ pour $0 < t < \tau$ et donner sa solution. Pour $t > \tau$, l'oscillateur est libre ; montrer que $x_1(t) = 2A_0 \cos(\delta\omega t)$ est une solution approchée de l'équation du mouvement pour $t > \tau$.

III.A.2) À partir d'un instant $t = T + \tau$ ultérieur, on exerce une force $\vec{F}' = m\omega_1^2 A_0 \cos(\omega_1(t - T - \tau)) \vec{e}_x$ pendant la même durée τ . Pourquoi $x_2(t) = x_1(t) + x_1(t - T - \tau)$ est-elle une solution approchée pour $t > T + 2\tau$? Déterminer une expression approchée de l'amplitude positive $x_{\max}$ des oscillations libres pour $t > T + 2\tau$ en fonction de $\delta\omega$, A_0 et T .

III.A.3) Représenter le signal $x(t)$ de $t = 0$ à $t > 2\tau + T$, pour les cas $\delta\omega T = 2\pi n$ et $\delta\omega T = 2\pi n + \pi$ où n est un entier. Quelle analogie vous inspire le rôle du terme $\delta\omega T$?

III.A.4) Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}$ de l'oscillateur pour $t > T + 2\tau$ en fonction de A_0 , $\delta\omega$, k et T . Si la largeur de la courbe donnant l'énergie $\mathcal{E}$ en fonction de $\delta f = \delta\omega/2\pi$ est estimée par l'écart entre deux minima de l'énergie $\mathcal{E}$, quelle est la plus faible variation de fréquence δf détectable ?

III.B – L'horloge atomique

L'horloge est composée d'un oscillateur macroscopique (à quartz par exemple) de fréquence f asservie sur la fréquence $f_0 = 9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$ de la transition entre deux niveaux d'énergie de l'atome de césium. On procède de la façon suivante (**figure 8**).

- On prépare un nuage d'atomes dans l'état fondamental d'énergie minimale.
- Les atomes sont sondés lors de leurs passages successifs, de durées τ , dans deux cavités où règne un champ électromagnétique de fréquence f . Selon l'écart de fréquence $\delta f = f - f_0$, les atomes sont excités dans une plus ou moins grande proportion. L'énergie $\mathcal{E}(\delta f)$ du nuage d'atomes à la sortie de la seconde cavité est maximale si $\delta f = 0$. Le temps de vol T entre les deux cavités est très supérieur à τ .
- On corrige la fréquence f de l'oscillateur de manière à rester au voisinage de l'énergie maximale.

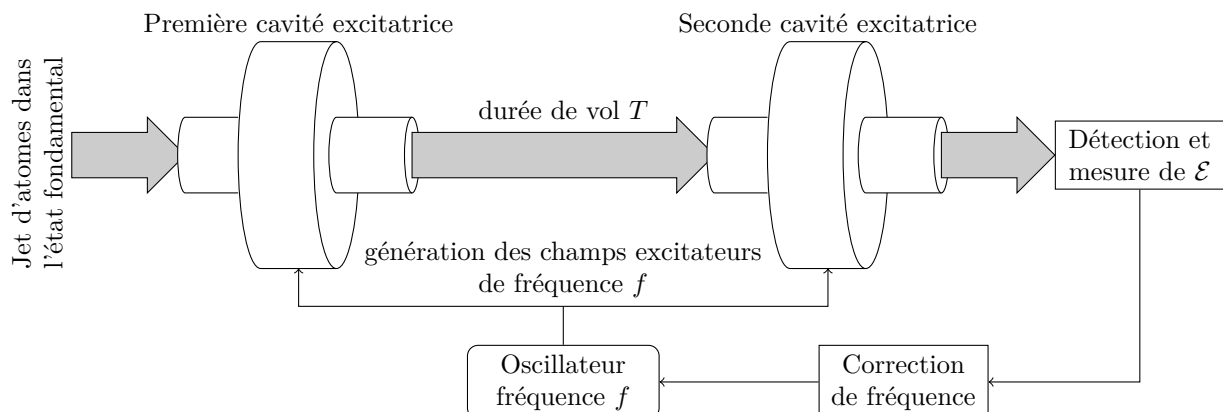


Figure 8

On admet que l'énergie $\mathcal{E}$ du nuage d'atomes est égale à la composante S_z d'un vecteur $\vec{S}$ (appelé spin fictif) : $\mathcal{E} = \vec{S} \cdot \vec{e}_z$. Le spin fictif $\vec{S}$ possède les propriétés suivantes (on ne cherchera pas à justifier ces équations) :

- à l'entrée de la première cavité, $\vec{S}(t=0) = -\mathcal{E}_0 \vec{e}_z$ avec $\mathcal{E}_0 > 0$;
- durant la traversée de l'horloge, $\vec{S}(t)$ obéit à l'équation $\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{S}$, avec $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_y$ dans chacune des deux cavités et $\vec{\omega} = \delta\omega \vec{e}_z$ durant le vol libre entre les cavités.

On a $\delta\omega = \delta f/2\pi = (f - f_0)/2\pi$ et ω_1 est choisie de sorte que $\omega_1\tau = \pi/2$; de plus $\delta\omega \ll \omega_1$.

III.B.1) Montrer que si $\vec{\omega}$ est constant, alors $\|\vec{S}(t)\| = \mathcal{E}_0$ et $\vec{S}(t) \cdot \vec{\omega} = \text{cte}$. Préciser la transformation géométrique subie par le vecteur $\vec{S}(t)$.

III.B.2) Tracer les vecteurs $\vec{S}$ aux différents instants indiqués sur la **figure 9** pour $\delta\omega T = 2\pi n$ où n est un entier. Quelle est l'énergie $\mathcal{E}$ du nuage à la sortie de la seconde cavité ? Tracer les vecteurs $\vec{S}$ aux mêmes instants pour $\delta\omega T = 2\pi n + \pi$. Quelle est l'énergie $\mathcal{E}'$ à la sortie de la seconde cavité ?

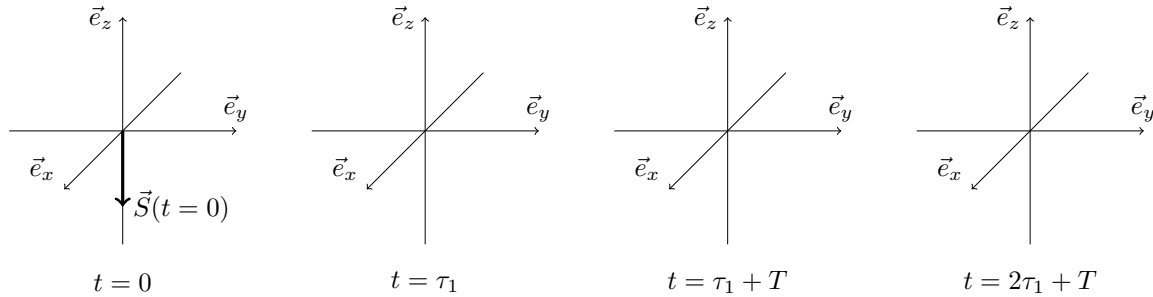


Figure 9

III.B.3) Déterminer l'énergie $\mathcal{E}(\delta\omega T)$ du nuage en sortie pour $\delta\omega T$ quelconque.

III.B.4) La fontaine atomique permet de mesurer l'énergie $\mathcal{E}$ du nuage pour différentes valeurs du désaccord $\delta f = f - f_0$. L'incertitude Δf sur la fréquence f de l'horloge est estimée par l'écart entre deux minima d'énergie. Déterminer l'expression de Δf en fonction de T .

III.B.5) Les atomes provenant d'une source thermique se déplacent à la vitesse moyenne $v_0 = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La distance qu'ils parcourent entre les deux cavités est $d = 1,0 \text{ m}$. Quelle incertitude relative $\Delta\tau/\tau$ sur la période $\tau = 1/f$ peut-on attendre d'une telle horloge (on donnera la réponse en secondes par année) ? Comment pourrait-on améliorer cette horloge ?

III.C – La fontaine atomique

L'horloge est placée verticalement et les atomes sont lancés vers le haut, dans le vide. Les atomes traversent une première fois une cavité d'interrogation (où ils interagissent avec le champ excitateur), puis ils ralentissent sous l'effet de la pesanteur, rebroussement chemin et traversent une deuxième fois la même cavité (où ils interagissent à nouveau avec le champ). Ils sont ensuite détectés. Il s'agit donc d'une interrogation de Ramsey spatialement repliée. La zone d'interrogation est conçue de façon à préserver les atomes des fluctuations de l'environnement (**figure 10**).

III.C.1) Les premières fontaines utilisaient des jets thermiques d'atomes, de vitesse moyenne $v_0 = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en sortie de cavité. Quelle est la hauteur H_0 du jet et la durée T_0 séparant les deux passages des atomes dans la cavité ? Commenter. Si le jet doit avoir une hauteur $H_1 = 1,0 \text{ m}$, quelle doit être la vitesse verticale v_1 des atomes à la sortie de la première cavité ? Calculer numériquement v_1 ainsi que le temps de vol T_1 correspondant (on prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

III.C.2) Le refroidissement laser permet d'obtenir un jet homocinétique d'une centaine d'atomes, de vitesse v_1 . Quelle incertitude relative $\Delta\tau/\tau$ (en ms/an) sur la période τ peut-on attendre d'une horloge à atomes froids ? La stabilisation en fréquence améliore ce rapport à $\Delta\tau/\tau = 10^{-16}$.

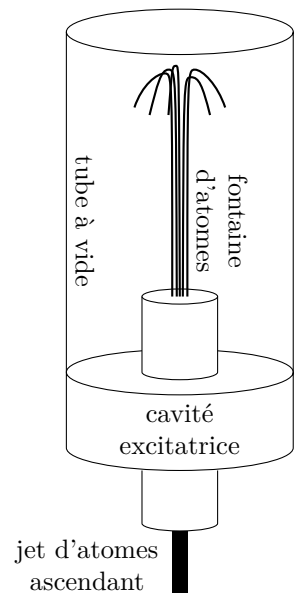


Figure 10

III.D – Décalage de fréquence

Le tube à vide, protégeant le jet d'atomes, est cylindrique, de rayon R , de hauteur H grande devant R . Ses parois métalliques sont supposées parfaitement conductrices et sont portées à la température θ_0 . Il règne alors dans ce tube un champ électromagnétique à symétrie cylindrique que l'on décrit par les vecteurs suivants : $\vec{E} = E_z(r, t)\vec{e}_z$; $\vec{B} = B_\theta(r, t)\vec{e}_\theta$.

III.D.1) Montrer que les champs proposés sont compatibles avec deux équations de Maxwell. Écrire deux équations différentielles couplées en E_z et B_θ . Quelles sont les conditions aux limites imposées par le cylindre ?

III.D.2) En déduire une équation aux dérivées partielles du second ordre pour E_z . On cherche les solutions sinusoïdales complexes dans le temps en posant $\underline{E}_z(r, t) = E(r)e^{j\omega t}$. Montrer que $E(r)$ vérifie l'équation

$$r \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{dE}{dr} + a^2 r E = 0$$

où l'on donnera l'expression de a .

III.D.3) Les solutions de l'équation précédente s'écrivent $E(r) = J_0(ar)$ où J_0 est appelée fonction de Bessel d'ordre 0. Le graphe de la fonction $J_0(x)$ est représenté sur la **figure 11**. On note x_n le $n^{\text{ième}}$ zéro positif de cette fonction. Donner les pulsations ω_n possibles du champ électrique en fonction de R , c et x_n . La solution appelée « mode n » s'écrit $E_{z,n}(r, t) = E_n J_0(r/r_n) \cos(\omega_n t)$ où E_n et r_n sont des constantes. Donner l'expression de r_n en fonction de R et x_n . Calculer numériquement la pulsation ω_1 et la fréquence f_1 correspondante pour $R = 5,00$ cm (on donne $x_1 = 2,40$).

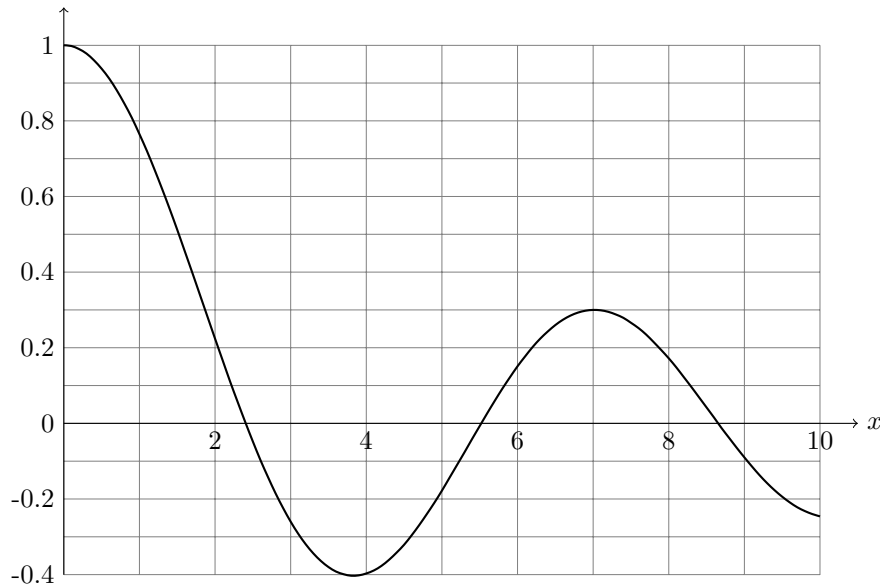


Figure 11

III.D.4) On note $J_1(x) = -\frac{dJ_0(x)}{dx}$. Exprimer le champ magnétique $B_{\theta,n}(r, t)$ du mode n en fonction de J_1 , E_n , r_n , ω_n et c . Donner l'expression de la densité d'énergie électromagnétique $u_{EM}(r, t)$ du mode n ainsi que sa moyenne temporelle $\langle u_{EM}(r) \rangle$ en fonction de J_0 , J_1 , E_n , R , x_n et ε_0 .

III.D.5) On note $\langle U_{EM} \rangle$ l'énergie électromagnétique moyenne du mode $n = 1$ dans toute la cavité. Exprimer $\langle U_{EM} \rangle$ en fonction de E_n , R , H , x_n et ε_0 . On donne $\int_0^{x_1} x [J_0^2(x) + J_1^2(x)] dx \simeq 1,56$. Quelle est la valeur maximale de l'amplitude du champ électrique du mode $n = 1$ si $\langle U_{EM} \rangle = k_B \theta_0$?

A.N. $\theta_0 = 300$ K, $H = 1$ m.

III.D.6) L'agitation thermique des atomes de la paroi excite un nombre de modes N tel que $\frac{h}{2\pi} \omega_N \simeq k_B \theta_0$ où h est la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann. En supposant que $x_n = n\pi$ pour n grand, évaluer le nombre N de modes excités. Les modes de champs non étudiés ici permettent d'écrire l'énergie électromagnétique U dans le cylindre sous la forme

$$U = \frac{\pi^3 H}{R} N^3 k_B \theta_0$$

En déduire une évaluation du champ électrique moyen E dans le cylindre.

A.N. Calculer E .

III.D.7) Ce champ électrique moyen est responsable d'un décalage δf_E de la fréquence propre f_0 des atomes de césium, donné par $\delta f_E = k_E E^2$ où $k_E = -2,27 \times 10^{-10} \text{ Hz} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{V}^{-2}$.

Comment δf_E dépend-il de la température ? Calculer numériquement δf_E et $|\delta f_E/f_0|$. Commenter, sachant que l'on peut atteindre actuellement une stabilité $\delta f/f_0 = 10^{-16}$. Quelle serait l'incertitude sur la mesure du rayon R_T de la Terre si on avait la même précision qu'une horloge atomique ? On donne $R_T = 6400$ km.

IV Détection et asservissement

IV.A – Détection du nombre d'atomes et mesure de l'énergie

Dans cette question, on montre comment l'énergie du nuage d'atomes est mesurée dans la fontaine atomique. Contrairement au modèle classique, on considère ici que les atomes ne peuvent se trouver que dans deux états : l'état 1 d'énergie $-E_0 < 0$ ou bien l'état 2 d'énergie $+E_0 > 0$. En tombant sous l'effet de la gravité, après avoir traversé la cavité micro-onde, le nuage d'atomes traverse le faisceau laser 1 dont la longueur d'onde est choisie pour détecter les atomes dans l'état 1 ; il passe ensuite dans le laser 2 qui permet de détecter les atomes dans l'état 2. Pour simplifier, on suppose que le faisceau laser i ($i = 1$ ou $i = 2$) forme une « nappe de lumière » d'intensité uniforme, considérée comme infinie dans le plan horizontal, comprise entre les altitudes z_i et $z_i + e$ (voir la [figure 12](#)). L'épaisseur e suivant la verticale est très faible devant la taille du nuage atomique (cette condition n'est pas respectée sur la [figure 12](#)). Les atomes dans l'état 1 (respectivement dans l'état 2) sont excités par le laser de détection 1 (resp. laser 2), puis ils émettent de la lumière en se désexcitant ; cette lumière dite de fluorescence est recueillie par un système optique pour être envoyée sur le détecteur D_1 (resp. D_2).

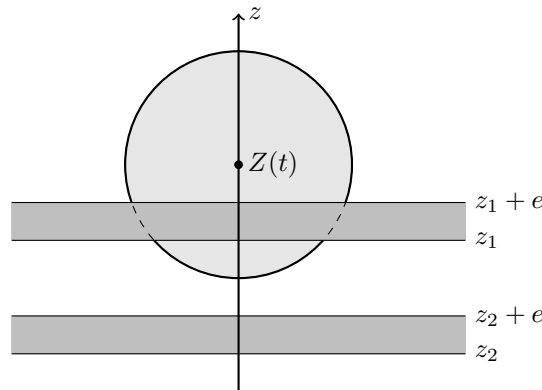


Figure 12

Lors de la détection la taille du nuage reste pratiquement constante, la densité d'atomes dans l'état 1 en un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) à l'instant t est bien modélisée par :

$$n_1(x, y, z, t) = \frac{N_1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + (z - Z(t))^2}{2\sigma^2}\right)$$

où N_1 représente le nombre d'atomes dans l'état 1 et $Z(t)$ désigne la position du centre du nuage d'atomes suivant la verticale à l'instant t .

IV.A.1) Déterminer l'unité SI de σ et donner sa signification physique. Par analogie avec la mécanique des fluides, qualifieriez-vous la grandeur n_1 de Lagrangienne ou d'Eulérienne (justifier votre réponse) ?

IV.A.2) On note $\mathcal{P}_0$ la puissance lumineuse reçue par le détecteur D_1 due à **un** atome dans l'état 1 situé dans le faisceau laser 1 (on suppose que $\mathcal{P}_0$ est indépendante de la position de l'atome dans le faisceau). Déterminer la puissance totale $\mathcal{P}_1(t)$ reçue à l'instant t par le détecteur D_1 en fonction de $\mathcal{P}_0$, N_1 , σ , $Z(t)$, z_1 et de l'épaisseur e des faisceaux laser ; on rappelle que e est très petit devant σ et on donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du = \sigma\sqrt{2\pi}$$

IV.A.3) Tracer l'allure de la fonction $\mathcal{P}_1(t)$ enregistrée par le détecteur. Est-elle rigoureusement symétrique par rapport à son maximum ? Pourquoi ?

IV.A.4) La puissance lumineuse $\mathcal{P}_2(t)$ reçue à l'instant t par le détecteur D_2 a la même expression que $\mathcal{P}_1(t)$ à condition de remplacer z_1 par z_2 et N_1 par le nombre N_2 d'atomes dans l'état 2. À l'aide d'un ordinateur, on détermine l'aire sous la courbe $\mathcal{P}_i(t)$ notée $\mathcal{A}_i$. Montrer que l'énergie totale du nuage d'atomes est proportionnelle à $\frac{\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}$ (on suppose que la vitesse du nuage reste pratiquement constante sur toute la zone de détection). Sachant que cette mesure va être répétée à chaque cycle de fonctionnement de la fontaine pour différentes valeurs de la fréquence micro-onde, quel est l'intérêt de diviser $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$?

IV.B – Asservissement de l'oscillateur macroscopique sur la fréquence atomique

Le signal de l'Horloge est donné par un OSCILLATEUR macroscopique de fréquence f_H . Bien que très stable, la fréquence $f_H(t)$ de cet oscillateur est susceptible d'évoluer dans le temps sous l'effet de différentes perturbations, c'est pourquoi il est nécessaire de l'asservir sur une fréquence atomique de référence f_0 .

Le schéma fonctionnel de l'asservissement est représenté sur la **figure 13**. Le signal d'erreur ε_k est construit dans le bloc DÉTECTION à partir de la mesure de la fluorescence de l'énergie $\mathcal{E}$ du nuage atomique. L'énergie $\mathcal{E}(\delta f)$ dépend du désaccord $\delta f = f - f_0$ entre la fréquence micro-onde f et fréquence atomique f_0 (interrogation Ramsey). Comme nous le verrons dans la suite, pour asservir l'horloge sur la fréquence atomique f_0 , il n'est pas possible d'utiliser une fréquence micro-ondes f simplement égale à la fréquence f_H de l'horloge (comme cela était le cas dans la **partie III**).

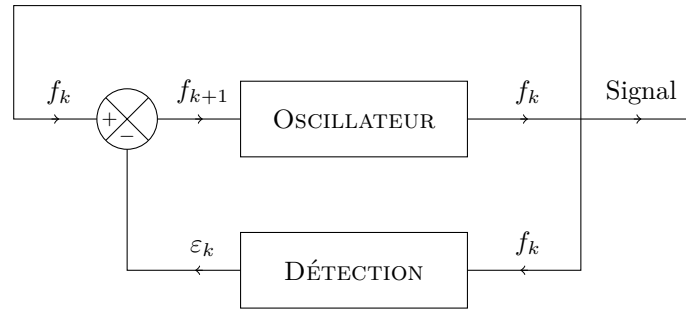


Figure 13

L'horloge atomique fonctionne par cycles de durées T_0 , on note $f_k = f_H(t = kT_0)$ la fréquence de l'oscillateur macroscopique au début du $k^{\text{ième}}$ cycle (pour $t = kT_0$). Au cours de chaque cycle, une première expérience est réalisée avec une fréquence micro-onde $f = f_k + \Delta$, puis une seconde avec une fréquence micro-onde $f = f_k - \Delta$, où Δ est une constante positive choisie pour optimiser l'asservissement. On construit ainsi un signal d'erreur ε_k (homogène à une fréquence) pour le $k^{\text{ième}}$ cycle :

$$\varepsilon_k = G \times \left(\mathcal{E}(f_k + \Delta - f_0) - \mathcal{E}(f_k - \Delta - f_0) \right)$$

où G est un facteur de gain constant.

Enfin, on admet que près de la résonance (pour des valeurs pas trop élevées du désaccord $\delta f = f - f_0$), l'énergie totale du nuage est donnée par $\mathcal{E}(\delta f) = \mathcal{E}_0 \cos(2\pi T \delta f)$ où T est le temps de vol des atomes dans la fontaine et $\mathcal{E}_0$ une constante positive.

IV.B.1) Montrer que pour $|f_k - f_0| \ll 1/T$, le signal d'erreur ε_k est proportionnel à $\delta f_k = f_k - f_0$. On exprimera la constante de proportionnalité en fonction de G et de la pente $P = \frac{d\mathcal{E}}{d(\delta f)}(\Delta)$ calculée en $\delta f = +\Delta$ (on rappelle que l'énergie $\mathcal{E}$ est une fonction paire de δf). Pourquoi n'est-il pas possible de générer un signal d'erreur sur le sommet de la frange centrale $\delta f = 0$?

IV.B.2) Pour optimiser l'asservissement, on choisit de prendre $\Delta = \frac{1}{4}T$. Justifier ce choix. Donner alors l'expression du signal d'erreur ε_k en fonction de G , $\mathcal{E}_0$, T et δf_k .

IV.B.3) Déterminer la fréquence f_{k+1} de l'oscillateur macroscopique pour le cycle $k+1$ en fonction de G , $\mathcal{E}_0$, T , f_0 et f_k . Quel doit être le signe du gain G pour que l'asservissement fonctionne correctement (justifier votre réponse) ? On observe l'évolution de la fréquence $f_H(t)$ de l'horloge sur des durées très grandes devant T_0 ; on rappelle que $f_H(kT_0) = f_k$. Dans l'hypothèse où $G\mathcal{E}_0T \ll 1$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par f_H , on introduira une constante de temps τ à exprimer en fonction de G , $\mathcal{E}_0$, T et T_0 .

IV.B.4) L'hypothèse $G\mathcal{E}_0T \ll 1$ n'est pas vérifiée dans les vraies horloges atomiques car le gain est choisi pour avoir une constante de temps de l'ordre de 3 cycles ; on suppose néanmoins que l'équation différentielle obtenue à la question précédente peut s'appliquer. La fréquence de l'oscillateur macroscopique subit une perturbation extérieure qui cesse à l'instant t_0 , on note $\Delta f_H = f_H(t_0) - f_0$. Déterminer l'expression de la fréquence f_H de l'horloge pour $t > t_0$ en fonction de f_0 , Δf_H , τ , t_0 et t .

Formulaire

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + \vec{e}_\theta \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

Constantes physiques :

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ U.S.I.}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Données relatives au rubidium et au césium :

	Rb	Cs
Numéro atomique Z	37	55
Masse molaire M ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	87	133
Masse volumique μ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	1532	1879
Enthalpies de première ionisation ($\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	403,0	375,7
Enthalpies de deuxième ionisation ($\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	2633	2234

• • • FIN • • •
