

Notations

Dans tout le problème :

- Par convention $0^0 = 1$.
- Si i et j sont des entiers naturels tels que $i \leq j$, on note $\llbracket i, j \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $i \leq k \leq j$.
- a et b sont des réels tels que $a < b$.
- Si x est un réel, on définit :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbf{Z}, k \leq x\} \quad \text{et} \quad \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbf{Z}, x \leq k\}$$

- p est un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
- ζ est la fonction de $] - 1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\zeta(x) = (x + 1) \ln(x + 1).$$

- Φ est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.
- $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p , ce que l'on note $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Résultats préliminaires

- 1 ▷ Rappeler la formule de Stirling. En déduire l'existence d'une suite réelle $(\epsilon_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ convergeant vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \epsilon_n).$$

- 2 ▷ Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Démontrer que :

$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda x \quad \text{et} \quad \lceil \lambda x + \mu \rceil \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda x.$$

3 ▷ Prouver que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt$ converge.

4 ▷ Démontrer que :

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Étude asymptotique d'une suite

Dans cette partie, si $n \in \mathbf{N}^*$, on note x_n le nombre entier $\lceil np - q \rceil$ et p_n le réel $P(X_n = x_n)$.

5 ▷ Justifier que p_n est le plus grand élément de $\{P(X_n = k), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

6 ▷ Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - x_n) = +\infty$.

Établir alors :

$$\sqrt{n p q} p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi} x_n^{x_n} (n - x_n)^{n-x_n}}.$$

7 ▷ Montrer que, pour tout entier $n > \max\left\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right\}$:

$$\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n - x_n)^{n-x_n}} = e^{-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right)}.$$

8 ▷ Montrer que la suite $(\sqrt{n p q} p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.

Convergence en loi

Dans toute la suite, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n p q}}(X_n - np)$ et on définit les réels $\tau_{n,k}$ par la relation :

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \tau_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{n p q}}.$$

9 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la loi de Y_n et vérifier que Y_n est une variable aléatoire centrée réduite.

10 ▷ Justifier l'existence d'un élément $N \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\text{pour tout entier } n \geq N, \quad [a, b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}] \text{ et } \frac{1}{\sqrt{n p q}} \leq b - a.$$

On définit les suites $(k_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $(e_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$k_n(t) = \lfloor \sqrt{npq}t + np \rfloor, \quad e_n(t) = \tau_{n,k_n(t)}, \quad f_n(t) = \sqrt{npq} P(Y_n = e_n(t)).$$

11 ▷ Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, e_n est une fonction en escalier croissante vérifiant :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e_n(t) \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Démontrer que $(e_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction e que l'on précisera.

12 ▷ Montrer que :

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt,$$

puis vérifier que

$$P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t) dt.$$

13 ▷ Prouver que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$f_n(\tau_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{pq n^2}{k(n-k)}} \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \frac{1 + \epsilon_n}{(1 + \epsilon_k)(1 + \epsilon_{n-k})},$$

où $(\epsilon_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est la suite définie à la question 1.

14 ▷ Justifier que, pour tout $t \in [a, b]$:

$$\sqrt{\frac{pq n^2}{k_n(t)(n - k_n(t))}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 + \epsilon_n}{(1 + \epsilon_{k_n(t)})(1 + \epsilon_{n - k_n(t)})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

15 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\max \left\{ \sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}} \right\} \times |\tau_{n,k}| < 1$:

$$\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)}.$$

16 ▷ Démontrer que :

$$\frac{p^{k_n(t)} q^{n - k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)} \left(\frac{n - k_n(t)}{n}\right)^{n - k_n(t)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

17 ▷ En conclure que :

$$\forall t \in [a, b], f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(t),$$

puis que :

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt.$$

18 ▷ Dédurre de tout ce qui précède que :

$$P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt,$$

puis que :

$$P(a \leq Y_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt.$$

Applications

19 ▷ Montrer que :

$$\forall T \in \mathbf{R}_+^*, \int_{-T}^T \Phi(t) dt \geq 1 - \frac{1}{T^2},$$

puis en déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt$.

20 ▷ Les suites $(P(Y_n \leq b))_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(P(Y_n \geq a))_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont-elles convergentes ? En préciser les limites éventuelles.

Généralisation

Soit φ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que φ' ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $Z_n = \varphi \circ Y_n$.

21 ▷ Montrer que, si $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, il existe une unique fonction Ψ continue sur $\mathbf{R}$ telle que :

$$\text{pour tout } (\alpha, \beta) \in \overline{\mathbf{R}}^2, \text{ si } \alpha \leq \beta, \text{ alors } P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^\beta \Psi(t) dt,$$

où $\overline{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble constitué des réels, de $-\infty$ et de $+\infty$.

Que dire si l'on ne suppose plus $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$?

FIN DU PROBLÈME