

Dans ce problème, on propose de définir la notion d'image d'une matrice réelle symétrique par une fonction d'une variable réelle, puis d'étudier quelques propriétés de cette notion (en particulier, relativement à la continuité et à la convexité). Ces notions présentent un intérêt en sciences physiques (statistique ou quantique).

Notations

Dans tout le problème :

- n désigne un entier naturel non nul ;
- si p et q sont des entiers naturels, l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq q$ est noté $\llbracket p, q \rrbracket$;
- si i et j sont des entiers naturels, alors $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon ;
- B_n désigne l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même ;
- I est un intervalle de $\mathbf{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un singleton ;
- $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$;
- une fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ est dite polynomiale s'il existe P un polynôme réel tel que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = P(x)$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $D_n(\mathbf{R})$, resp. $S_n(\mathbf{R})$, resp. $O_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. diagonales, resp. symétriques, resp. orthogonales) d'ordre n à coefficients réels, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;
- on note Tr l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$;
- si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note tM sa transposée, on note $\text{Sp}(M)$ son spectre réel, et si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $[M]_{i,j}$ est le coefficient de M situé à la i -ème ligne et j -ème colonne ;
- on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de sa norme infinie, notée $\|\cdot\|$ et définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \|M\| = \max \{|[M]_{i,j}|, 1 \leq i, j \leq n\} ;$$

- $S_n(I)$ désigne l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont le spectre réel est inclus dans I ;

- si $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$, on dit que ce n -uplet est croissant si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$(i \leq j) \implies (u_i \leq u_j) ;$$

- si $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle nombre d'occurrences de u_{i_0} dans u le cardinal de l'ensemble $\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket ; u_i = u_{i_0}\}$;
- enfin $\text{Diag}((u_i)_{1 \leq i \leq n})$ désigne l'élément D de $D_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, [D]_{i,i} = u_i$$

on pourra noter cet élément en extension $D = \text{Diag}(u_1, \dots, u_n)$.

Matrices de permutations

Le but de cette partie est d'étudier l'action sur les matrices diagonales de la conjugaison par des matrices de permutations. On considère l'application ω de B_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall \sigma \in B_n, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, [\omega(\sigma)]_{i,j} = \delta_{i, \sigma(j)}.$$

1 ▷ Démontrer que pour tout $(\sigma, \sigma') \in B_n^2$, $\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma) \omega(\sigma')$.

2 ▷ Démontrer que $\omega(B_n) \subset O_n(\mathbf{R})$.

3 ▷ Soit $\sigma \in B_n$ et $(d_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que :

$$\text{Diag}((d_i)_{1 \leq i \leq n}) \omega(\sigma) = \omega(\sigma) \text{Diag}((d_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}).$$

4 ▷ En déduire l'équivalence suivante concernant deux éléments D et D' de $D_n(\mathbf{R})$,

- D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D' .
- il existe $M \in \omega(B_n)$ telle que $D' = {}^t M D M$.

Fonctions de matrices symétriques

Cette partie a pour objectif de définir une correspondance entre l'espace des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ et l'espace des fonctions de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$, puis d'en démontrer quelques propriétés. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

5 ▷ Soit $S \in S_n(I)$. Justifier l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et de $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ tels que :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((s_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega.$$

6 ▷ Pour tout $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$, justifier l'existence d'un élément P de $\mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(s_i) = f(s_i).$$

Soit $S \in S_n(I)$. On suppose que l'on dispose des deux écritures :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((s_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega \quad \text{et} \quad S = {}^t\Omega' \operatorname{Diag}((s'_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega',$$

avec $\Omega, \Omega' \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq n}, (s'_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$.

7 ▷ Montrer que l'on a alors :

$${}^t\Omega' \operatorname{Diag}((f(s'_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega' = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((f(s_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega,$$

puis que ${}^t\Omega \operatorname{Diag}((f(s_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega \in S_n(\mathbf{R})$.

Dans la suite du problème, on note u l'application qui, à toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$, associe $u(\varphi)$ la fonction de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall S \in S_n(I), u(\varphi)(S) = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((\varphi(s_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega,$$

où $S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((s_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega$, avec $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$.

Cette fonction est bien définie puisque, d'après la question précédente, $u(\varphi)(S)$ ne dépend pas du choix des matrices $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \operatorname{Diag}((s_i)_{1 \leq i \leq n})$ avec $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$, tel que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

Enfin, on désigne par v l'application $\operatorname{Tr} \circ u$.

8 ▷ Vérifier que u et v sont linéaires, puis calculer, pour toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in I$, $u(\varphi)(xI_n)$.

9 ▷ Étudier l'injectivité et la surjectivité de u .

10 ▷ On suppose que f est polynomiale ; montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$.

Réciproquement, est-il vrai que, s'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$, alors f est polynomiale ?

- 11** ▷ Démontrer que, si $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction φ , alors les suites $(u(\varphi_k))_{k \in \mathbf{N}}$ et $(v(\varphi_k))_{k \in \mathbf{N}}$ convergent simplement sur $S_n(I)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur $S_n(I)$ si l'on suppose que $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur I ?

Norme et convexité

L'objectif de cette partie est de munir $S_n(\mathbf{R})$ d'une nouvelle norme qui permettra de compléter l'étude des fonctions de matrices symétriques.

- 12** ▷ On note $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) ; {}^t X X = 1\}$. Démontrer que si $S \in S_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\min(\mathrm{Sp}(S)) = \min \{ {}^t X S X ; X \in \Sigma \} \text{ et } \max(\mathrm{Sp}(S)) = \max \{ {}^t X S X ; X \in \Sigma \}.$$

- 13** ▷ Montrer finalement que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbf{R})$ et que l'application ρ , de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, qui à toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ associe

$$\max \{ |\lambda| ; \lambda \in \mathrm{Sp}(M) \},$$

est une norme sur $S_n(\mathbf{R})$.

Continuité des fonctions de matrices symétriques

Dans cette partie, à l'aide de la norme précédemment introduite, on démontre quelques résultats relatifs à la continuité des fonctions de matrices symétriques. On suppose désormais $S_n(\mathbf{R})$ muni de la norme ρ et on appelle χ l'application de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}[X]$ qui, à tout élément de $S_n(\mathbf{R})$, associe son polynôme caractéristique.

On définit aussi l'application, notée $\mathrm{Sp}_\uparrow$, qui à toute matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$, associe son spectre croissant (c'est-à-dire le n -uplet croissant des valeurs propres de S dans lequel le nombre d'occurrences de chaque valeur propre coïncide avec son ordre de multiplicité).

- 14** ▷ Démontrer que χ est continue.

On souhaite maintenant prouver que $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue. À cet effet, on introduit un élément M de $S_n(\mathbf{R})$ et une suite $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans $S_n(\mathbf{R})$ qui converge vers M . Si $k \in \mathbf{N}$, on note $\Lambda_k = \mathrm{Sp}_\uparrow(M_k)$.

- 15** ▷ Démontrer que la suite $(\Lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence croissante.

- 16** ▷ Montrer que, si α est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que la suite $(\Lambda_{\alpha(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ converge, alors : $\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \text{Sp}_{\uparrow}(M)$.
- 17** ▷ En déduire que $\text{Sp}_{\uparrow}$ est continue.
- 18** ▷ Démontrer que $O_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- 19** ▷ Démontrer que, si $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, alors $u(\varphi)$ et $v(\varphi)$ sont continues.

Convexité des fonctions de matrices symétriques

On démontre maintenant quelques résultats relatifs à la convexité des fonctions de matrices symétriques. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

- 20** ▷ On suppose ici que f est convexe sur I et que $S \in S_n(I)$. On note

$$\mathcal{U}_S = \{ {}^t \Omega S \Omega ; \Omega \in O_n(\mathbf{R}) \}.$$

Justifier que pour tout $U \in \mathcal{U}_S$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[U]_{k,k} \in I$.

Démontrer alors que :

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^n f([U]_{k,k}) ; U \in \mathcal{U}_S \right\} = v(f)(S).$$

- 21** ▷ En déduire que, si f est convexe sur I , pour tout $(A, B) \in S_n(I)^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B).$$

On dit qu'une fonction ψ de $S_n(I)$ dans $\mathbf{R}$ est convexe sur $S_n(I)$ si elle vérifie la relation :

$$\forall (A, B) \in S_n(I)^2, \forall t \in [0, 1], \quad \psi((1-t)A + tB) \leq (1-t)\psi(A) + t\psi(B).$$

- 22** ▷ Démontrer finalement que la fonction $v(f)$ est convexe sur $S_n(I)$ si, et seulement si, f est convexe sur I .

FIN DU PROBLÈME