

Autour des exponentielles de matrices

Dans tout le sujet, le corps $\mathbf{K}$ sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|I_n\| = 1 . \quad (N_1)$$

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2 \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\| . \quad (N_2)$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice, notée e^A , ou bien $\exp(A)$, définie par

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} .$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application

$$f_A : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) , \quad t \mapsto f_A(t) = e^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f'_A(t) = A e^{tA} = e^{tA} A .$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors

$$e^B = P^{-1} e^A P .$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit leur **crochet de Lie** par

$$[A, B] = AB - BA .$$

La partie 4 du problème est indépendante des parties 2 et 3.

1 Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1 ▷ Montrer que les matrices A et e^B commutent.

On définit une application

$$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

$$t \longmapsto g(t) = e^{t(A+B)} e^{-tB}.$$

2 ▷ Montrer que l'application g , et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy. En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}. \quad (1)$$

3 ▷ Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t , montrer que les matrices A et B commutent.

4 ▷ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, prouver la relation $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

5 ▷ Montrer que $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

2 Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} \right)^k = e^{A+B} \text{ ou } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{k}\right) \exp\left(\frac{B}{k}\right) \right)^k = \exp(A+B). \quad (2)$$

Pour tout k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{A}{k}\right) \exp\left(\frac{B}{k}\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{A+B}{k}\right).$$

6 ▷ Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right).$$

On introduit la fonction

$$h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

$$t \longmapsto h(t) = e^{tA} e^{tB} - e^{t(A+B)}$$

7 ▷ Montrer que

$$X_k - Y_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

8 ▷ Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}.$$

En déduire la relation (2).

3 Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit **groupe spécial linéaire** :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on introduit son **algèbre de Lie** :

$$\mathcal{A}_G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R} \quad e^{tM} \in G\}.$$

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, sont bien des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9 ▷ Déterminer $\mathcal{A}_G$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

10 ▷ Si $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

11 ▷ En utilisant la partie 2, montrer que $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12 ▷ Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t &\longmapsto u(t) = e^{tA} \cdot B \cdot e^{-tA} \end{aligned}$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.

13 ▷ En déduire que $\mathcal{A}_G$ est stable par le crochet de Lie, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A}_G, \forall B \in \mathcal{A}_G, [A, B] \in \mathcal{A}_G.$$

On rappelle que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on dit que M est **tangente** à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L'ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé **espace tangent** à G en I_n , et noté $\mathcal{T}_{I_n}(G)$.

On rappelle aussi que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14 ▷ Prouver l'inclusion $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe, soit l'application $\delta_M : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, t \mapsto \delta_M(t) = \det(I_n + tM)$. En utilisant un développement limité à l'ordre 1, montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta'_M(0)$.

16 ▷ Montrer que la différentielle au point I_n de l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ est la forme linéaire "trace".

17 ▷ Montrer que, dans les cas particuliers $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, on a $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β . On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double.

18 ▷ Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel, puis e^{tT} pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On pose $E = \mathbf{C}^n$. L'espace vectoriel E , identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$, on rappelle qu'elles sont toutes équivalentes. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et à celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i, j) de la matrice e^{tA} . Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f_A(t) = e^{tA} = (v_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}).$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A , on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \text{Ker}((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}).$$

On posera aussi $\alpha = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \text{Re}(\lambda)$.

19 ▷ Montrer que, si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha < 0$.

20 ▷ Montrer que $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$.

21 ▷ En déduire l'existence de trois matrices P , D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que :

$$\begin{aligned} P &\text{ est inversible,} \\ D &\text{ est diagonale,} \\ N &\text{ est nilpotente,} \\ ND &= DN, \\ A &= P(D + N)P^{-1}, \\ \chi_A &= \chi_D. \end{aligned}$$

22 ▷ En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = O(t^p e^{\alpha t}) \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

23 ▷ Étudier la réciproque de la question 19).

24 ▷ On suppose, *dans cette question seulement*, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbf{C}^n$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} X = 0 \iff X = 0.$$

Dans les questions qui suivent, on introduit les polynômes suivants :

$$P_s(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(A) \\ \text{Re}(\lambda) < 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

$$P_i(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(A) \\ \text{Re}(\lambda) > 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

$$P_n(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(A) \\ \text{Re}(\lambda) = 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

et les sous-espaces $E_s = \text{Ker}(P_s(A))$, $E_i = \text{Ker}(P_i(A))$ et $E_n = \text{Ker}(P_n(A))$ de $E = \mathbf{C}^n$. Les indices s, i, n signifient respectivement *stable*, *instable* et *neutre*.

25 ▷ Après avoir justifié que $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$, montrer que

$$E_s = \{X \in E \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} X = 0\}.$$

On prouverait de même, mais ce n'est pas demandé, que

$$E_i = \{X \in E \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA} X = 0\}.$$

26 ▷ Montrer que

$$E_n = \{X \in E \mid \exists C \in \mathbf{R}_+^* \exists p \in \mathbf{N} \forall t \in \mathbf{R} \quad \|e^{tA} X\|_E \leq C (1 + |t|)^p\}.$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de $\mathbf{C}^n$ tels que la fonction vectorielle $t \mapsto e^{tA} X$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.

FIN DU PROBLÈME