

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $] -1, +\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt.$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2},$$

puis vérifier que si $t \in]0, \pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0,$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

2 Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I, (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \quad (1)$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I .

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 .

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

3 Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n dt$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt.$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du,$$

puis que

$$D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b , et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}.$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x).$$

13 ▷ Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx).$$

14 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k.$$

15 ▷ En conclure que

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi\sigma(\rho^2).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}.$$

16 ▷ Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, de $]0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in]0, \pi], \Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t).$$

En déduire $f''(0)$.

5 Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J .

17 ▷ Vérifier que f est une application de I dans $\mathbf{R}$ ln-convexe.

On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.

On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \tilde{f}(x) = \ln(f(2x)).$$

18 ▷ Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}_+, \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

19 ▷ On suppose ici que $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x \leq p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leq \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

- 20** ▷ En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

- 21** ▷ Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbf{R}_+^*$, toutes les applications g de $] - T, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in] - T, +\infty[, (t + T)g(t) = (t + 2T)g(t + 2T).$$

- 22** ▷ Existe-t-il une application h , de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R}, (t + T)h(t) = (t + 2T)h(t + 2T) ?$$