Notations et résultats admis

— Dans tout le sujet, n est un entier naturel fixé non nul.

— Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un espace probabilisé fini.

— On note $L^0(\Omega)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles definies sur Ω. On notera que si $X \in L^0(\Omega)$, $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbf{R}$. On confondra systématiquement variable aléatoire nulle et variable aléatoire presque sûrement nulle.

— Si $X \in L^0(\Omega)$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

— Une variable aléatoire $X \in L^0(\Omega)$ suit une loi de Rademacher si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(X = 1\right) = \mathbf{P}\left(X = -1\right) = \frac{1}{2}.$$

— Si $p \in [1, +\infty[$ et $X \in L^0(\Omega)$, on note $\|X\|_p = \left(\mathbf{E}\left(|X|^p\right)\right)^{1/p}$. On admet que l'application $X \mapsto \|X\|_p$ est alors une norme sur $L^0(\Omega)$.

— Si $m \in \mathbf{N}^\star$, $p \in [1, +\infty[$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, on définit la quantité $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ par :

$$\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

On admet que l'application $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mapsto \|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ est une norme sur $\mathbf{R}^m$.

— On note $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ l'ensemble des suites de $\mathbf{R}$ nulles à partir d'un certain rang. On admet alors que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$.

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 $\triangleright$ Montrer que
$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2 $\triangleright$ En déduire l'inégalité suivante (inégalité de Hölder) :
$$\mathbf{E}(XY) \leq \left(\mathbf{E}\left(X^p\right)\right)^{1/p} \left(\mathbf{E}\left(Y^q\right)\right)^{1/q}.$$
On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{E}\left(X^p\right) = \mathbf{E}\left(Y^q\right) = 1$.

3 $\triangleright$ Quelle inégalité retrouve-t-on lorsque $p = q = 2$? En donner alors une preuve directe.

Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

4 $\triangleright$ Montrer que
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}\,(t) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

5 $\triangleright$ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,
$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i^2\right).$$

6 $\triangleright$ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,
$$\mathbf{P}\left(\exp\left(x \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq 2\,\mathrm{e}^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2}{2}\right).$$
On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

7 $\triangleright$ Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,
$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right).$$

Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

8 $\triangleright$ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

9 $\triangleright$ On suppose dans cette question que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^4\right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

10 $\triangleright$ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

11 $\triangleright$ En déduire qu'il existe un réel $\beta_p > 0$ tel que

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

12 $\triangleright$ On suppose $p \geq 2$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Dans les questions numérotées de 13 $\triangleright$ à 15 $\triangleright$, on suppose $1 \leq p < 2$.

13 $\triangleright$ Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{4}$.

14 $\triangleright$ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) \;\leq\; \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{2\theta/p} \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right)^{(1-\theta)/2}.$$

15 $\triangleright$ Montrer qu'il existe $\widetilde{\alpha}_p > 0$ tel que

$$\widetilde{\alpha}_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

16 $\triangleright$ En déduire qu'il existe un réel α_p tel que

$$\alpha_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Une première conséquence

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Rademacher.

17 $\triangleright$ Montrer que l'application φ définie sur $\left(L^0(\Omega)\right)^2$ par

$$\forall X, Y \in L^0(\Omega), \quad \varphi(X,Y) = \mathbf{E}(XY)$$

est un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$.

18 $\triangleright$ Soit l'application $\psi : u \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$. Montrer que ψ prend ses valeurs dans $L^0(\Omega)$, puis que ψ conserve le produit scalaire.

19 $\triangleright$ On note $R = \psi\left(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}\right)$. Montrer que pour tous $p, q \in [1, +\infty[$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur R.

Une deuxième conséquence

Dans cette partie, on suppose que n est une puissance de 2 : on écrit $n = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}^\star$.

20 ▷ Soit $(a_1,\dots,a_k)\in\mathbf{R}^k$. Montrer que

$$\alpha_1 n\left\|(a_1,\dots,a_k)\right\|_2^{\mathbf{R}^k}\leq\sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k}\left|\sum_{i=1}^k\varepsilon_i a_i\right|\leq\beta_1 n\left\|(a_1,\dots,a_k)\right\|_2^{\mathbf{R}^k}.$$

On pourra utiliser les questions 11 et 16.

21 ▷ En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de dimension k de $\mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall x\in F,\quad \alpha_1\sqrt{n}\left\|x\right\|_2^{\mathbf{R}^n}\leq\left\|x\right\|_1^{\mathbf{R}^n}\leq\beta_1\sqrt{n}\left\|x\right\|_2^{\mathbf{R}^n}.$$

En ordonnant les n éléments de $\{-1,1\}^k$ de manière arbitraire, on pourra utiliser l'application T définie sur $\mathbf{R}^k$ par $T(a_1,\dots,a_k)=\left(\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right)_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k}$.

Fin du problème