Notations

— Pour tout $0 \leq k \leq n$, on notera $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial où $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

— On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que a est un zéro d'ordre $m > 0$ de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Dans la suite du texte quand on liste les zéros d'un polynôme on répètera chaque racine autant de fois que sa multiplicité : ainsi les racines de $X^3(X-1)^2$ sont $0, 0, 0, 1, 1$.

— On note $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'opérateur de dérivation, i.e. $D(f) = f'$. Pour $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, on note $Q(D)$ l'opérateur défini par

$$Q(D) : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$$

$$f \mapsto \sum_{k=0}^n a_k D^k(f),$$

c'est-à-dire que

$$Q(D)f(x) = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x)$$

où $f^{(k)}$ est la fonction dérivée k -ème.

Log-concavité des suites

Soit $(a_0, \dots, a_n)$ une suite à valeurs réelles. On dira qu'elle est

— *unimodulaire* s'il existe $0 \leq j \leq n$ tel que $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \cdots \geq a_n$;

— *log-concave* si pour tout $1 \leq j \leq n-1$, on a $a_j^2 \geq a_{j-1}a_{j+1}$;

— *ultra log-concave* si $\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)_{k=0, \dots, n}$ est log-concave.

1 ▷ Montrer que la suite binomiale $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0, \dots, n}$ est log-concave.

2 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

3 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

Polynômes réels à racines toutes réelles

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbf{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Il est dit à racines toutes réelles si toutes ses racines complexes sont en fait réelles, i.e. $P(z) = 0$ implique $z \in \mathbf{R}$. On suppose dans cette question que P est à racines toutes réelles.

4 ▷ Montrer que P' est à racines toutes réelles.

Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle en veillant aux multiplicités des racines.

5 ▷ Montrer que $Q(X) = X^n P(1/X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Indication : on commencera par préciser le degré de $Q(X)$.

6 ▷ Pour $1 \leq k \leq n-1$, on considère $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$ puis $Q_2(X) = X^{n-k+1}Q_1(X^{-1})$ et enfin $Q(X) = Q_2^{(n-k-1)}(X)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme de degré au plus 2 à racines toutes réelles et en déduire que $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est ultra log-concave.

On considère comme précédemment un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n à racines toutes réelles.

7 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que $e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x))$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Indication : on pourra à nouveau utiliser le théorème de Rolle en considérant en outre le comportement en $\pm\infty$.

8 ▷ Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. Montrer que $Q(D)P(X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Dans la question 27 ▷, nous utiliserons le théorème de composition de Schur suivant, que nous admettons.

Théorème 1 Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. On suppose en outre que les racines de Q ont toutes le même signe. Alors le polynôme

$$P \circ Q(X) := \sum_{k=0}^{\min(n,m)} a_k b_k (k!) X^k$$

est à racines toutes réelles.

Quelques exemples

Soit A une matrice symétrique réelle de taille n .

- 9** ▷ Montrer que son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est à racines toutes réelles.
- 10** ▷ On suppose que toutes les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer l'existence d'une matrice symétrique C telle que $A = C^2$.
- 11** ▷ Soit B une matrice symétrique et on suppose comme dans la question précédente que les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer que les valeurs propres de AB sont toutes réelles.

On considère

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx. \end{cases}$$

- 12** ▷ Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.
- 13** ▷ Justifier (on ne demande pas de les calculer) qu'il existe une famille $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- les L_i sont de degré i ;
- pour tout $0 \leq i, j \leq n$, $\varphi(L_i, L_j) = \delta_{i,j}$ i.e. nul si $i \neq j$ et égal à 1 pour $i = j$.

- 14** ▷ Montrer que pour tout $n \geq 1$, le polynôme L_n est à racines toutes réelles.

Soit $(B_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli $\mathcal{B}(b_i)$ indépendantes de paramètres respectifs b_i , i.e. $\mathbf{P}(B_i = 1) = b_i$ et $\mathbf{P}(B_i = 0) = 1 - b_i$. Soit alors $B = \sum_{i=1}^n B_i$ et soit

$$P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k$$

où $p_k = \mathbf{P}(B = k)$.

- 15** ▷ Montrer que $P(X)$ est à racines toutes réelles.
- 16** ▷ Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ à coefficients positifs, i.e. $p_k \geq 0$ pour tout $k = 0, \dots, n$. On suppose en outre que P est à racines toutes réelles et que $P(1) = 1$. Montrer alors qu'il existe des variables de Bernoulli indépendantes B_i telles que pour tout $k = 0, \dots, n$, on a $p_k = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^n B_i = k)$.

Théorème de Hermite-Sylvester

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n . On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P et $\beta_1, \overline{\beta}_1, \dots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ ses racines complexes non réelles, où $\overline{\beta}_i$ désigne le conjugué de β_i . On note m_i la multiplicité de α_i et n_j celle de β_j et $\overline{\beta}_j$.

Pour tout $k \geq 0$, on introduit

$$s_k = \sum_{i=1}^r m_i \alpha_i^k + \sum_{j=1}^s n_j (\beta_j^k + \overline{\beta}_j^k).$$

On introduit les applications linéaires $\varphi_k : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i^{k-1}$$

ainsi que

$$\psi_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i^{k-1}.$$

On notera aussi $\overline{\psi}_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{\beta}_i^{k-1}$.

17 ▷ Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \overline{\psi}_1, \dots, \psi_s, \overline{\psi}_s)$ est une famille libre.

Indication : on pourra utiliser les matrices de Vandermonde.

18 ▷ Montrer que

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^r m_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n)^2 + \sum_{k=1}^s n_k (\psi_k(x_1, \dots, x_n)^2 + \overline{\psi}_k(x_1, \dots, x_n)^2),$$

s'écrit sous la forme $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n s_{i+j-2} x_i x_j$.

19 ▷ Montrer que si P est à racines toutes réelles, alors $q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n s_{i+j-2} x_i x_j$, est à valeurs positives.

On suppose à présent $r < n$ et on écrit pour tout $i = 1, \dots, s$

$$\psi_i^2 + \overline{\psi}_i^2 = 2 \operatorname{Re}(\psi_i)^2 - 2 \operatorname{Im}(\psi_i)^2.$$

20 ▷ Montrer que les applications linéaires $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ suivantes sont $\mathbf{R}$ -linéairement indépendantes :

$$\varphi_1, \dots, \varphi_r, \operatorname{Re}(\psi_1), \operatorname{Im}(\psi_1), \dots, \operatorname{Re}(\psi_s), \operatorname{Im}(\psi_s).$$

21 ▷ Conclure que P est à racines toutes réelles si et seulement si q est à valeurs positives sur $\mathbf{R}^n$.

Indication : on pourra utiliser, sans justification, l'existence d'un vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ qui annule toutes les formes linéaires de la question précédente sauf une au choix.

Suite multiplicative de Polya-Schur

Étant donnée une suite réelle $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on considère l'opérateur $\Gamma : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ défini par la formule

$$\Gamma\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^n a_k \gamma_k X^k.$$

Une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est dite multiplicative au sens de Polya-Schur si l'opérateur Γ préserve l'ensemble des polynômes à racines toutes réelles, i.e. si P a toutes ses racines réelles alors $\Gamma(P)$ aussi.

22 ▷ Montrer que la suite définie par $\gamma_n = n$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

23 ▷ Montrer que si $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur alors pour tout $k \geq 0$, la suite $(\gamma_n)_{n \geq k} = (\gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots)$ l'est aussi.

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$. On suppose que P a toutes ses racines réelles : on les note $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. On rappelle que $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{k=1}^n x_k$ et on admet que $\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ de sorte que

$$a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} = a_n^2 \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

24 ▷ Soit $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ une suite non nulle, multiplicative au sens de Polya-Schur et on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\gamma_k = 0$ avec $\gamma_{k-1} \neq 0$. Montrer que $\gamma_{k+1} = 0$ puis que $\gamma_m = 0$ pour tout $m \geq k$.

Indication : on pourra utiliser les expressions de $\Gamma((1+X)^{k+1})$ et $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1})$, puis, pour $m \geq k+2$, raisonner sur les racines de $\Gamma((1+X)^m)$.

25 ▷ On suppose que la suite multiplicative $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ ne s'annule jamais. Montrer alors qu'elle est soit de signe constant, soit alternée.

Indication : on pourra utiliser encore l'expression de $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1})$.

Théorème de Polya-Schur

On considère à présent une suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ strictement positive, i.e. $\gamma_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

On suppose que $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

26 ▷ Montrer que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles et négatives.

Réciproquement supposons que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles négatives. On fait le changement de variable $x = z/n$, de sorte que

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) z^k,$$

a toutes ses racines réelles et négatives.

27 ▷ En utilisant le théorème 1, montrer que $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

On suppose que $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

28 ▷ Montrer que $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est log-concave, i.e. $\gamma_k^2 \geq \gamma_{k+1} \gamma_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

29 ▷ En déduire que la série entière $\sum_{n \geq 0} \gamma_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

30 ▷ En déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives.

31 ▷ Réciproquement montrer que si $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme, sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives, alors $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

Indication : pour cette question, toute tentative de réponse, partielle ou purement qualitative, sera considérée par le Jury.

FIN DU PROBLÈME