

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Pour  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ , le vecteur colonne  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  appartient à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ ; on pose

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

On admet que l'application  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \mapsto \|X\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ . On note

$$\Sigma_n = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) ; \|X\| = 1\}.$$

On identifie  $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{C})$  à  $\mathbf{C}$ . Ainsi, si  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,  $X^T M Y$  est un nombre complexe.

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on note  $\chi_M$  le polynôme caractéristique de  $M$ ,  $\sigma(M)$  l'ensemble des valeurs propres de  $M$ . Si  $1 \leq i, j \leq n$ , on note  $(M)_{i,j}$  le coefficient de  $M$  situé à la  $i$ -ième ligne et à la  $j$ -ième colonne. Pour  $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M)$ , on note

$$R_z(M) = (zI_n - M)^{-1}.$$

Soient

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbf{C} ; |z| = 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C} ; |z| \leq 1\}.$$

Les parties 4 et 5 sont indépendantes des parties 1, 2 et 3. Dans la partie 3, les questions 7 à 10 sont indépendantes des questions 5 et 6.

## 1 Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

1 ▷ Justifier que si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , l'application

$$X \in \Sigma_n \mapsto \|MX\|$$

atteint son maximum, que l'on notera  $\|M\|_{\text{op}}$ .

Établir les deux propriétés

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \|M\|_{\text{op}} = \max \left\{ \frac{\|MX\|}{\|X\|} ; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0\} \right\},$$

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \quad \|M'M\|_{\text{op}} \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}.$$

On admettra dans la suite que l'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto \|M\|_{\text{op}}$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

**2** ▷ Si  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ , montrer que

$$\max\{|V^T U| ; V \in \Sigma_n\} = \|U\|.$$

En déduire que, si  $M$  est dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , alors

$$\max\{|X^T M Y| ; (X, Y) \in \Sigma_n \times \Sigma_n\} = \|M\|_{\text{op}}.$$

## 2 L'ensemble $\mathcal{B}_n$

Soit  $\mathcal{B}_n$  l'ensemble des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telles que la suite  $(\|M^k\|_{\text{op}})_{k \in \mathbf{N}}$  soit bornée. Pour  $M \in \mathcal{B}_n$ , on pose

$$b(M) = \sup\{\|M^k\|_{\text{op}} ; k \in \mathbf{N}\}.$$

**3** ▷ Soient  $M \in \mathcal{B}_n$ ,  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ . Montrer que la suite  $(\|M^k X\|)_{k \in \mathbf{N}}$  est bornée.

Si  $\lambda \in \sigma(M)$ , si  $X$  est un vecteur propre de  $M$  associé à  $\lambda$ , exprimer pour  $k \in \mathbf{N}$ , le vecteur  $M^k X$  en fonction de  $\lambda$ ,  $k$  et  $X$ . En déduire que  $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$ .

**4** ▷ On suppose que  $n \geq 2$ . Indiquer, avec justification, une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , triangulaire supérieure, telle que  $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$ , mais n'appartenant pas à  $\mathcal{B}_n$ .

## 3 Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On dit que l'élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  vérifie  $\mathcal{P}$  si, pour tout  $(i, j)$  de  $\{1, \dots, n\}^2$ , il existe un élément  $P_{M,i,j}$  de  $\mathbf{C}_{n-1}[X]$  tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M), \quad (R_z(M))_{i,j} = \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)}. \quad (\mathcal{P})$$

**5** ▷ Montrer que les matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  vérifient  $\mathcal{P}$ . On commencera par le cas des matrices diagonales.

- 6** ▷ On admet que toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  vérifie  $\mathcal{P}$ . En déduire que, si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  et  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$ , il existe un élément  $P_{M,X,Y}$  de  $\mathbf{C}_{n-1}[X]$  tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M), \quad X^T R_z(M) Y = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}.$$

- 7** ▷ Soient  $M \in \mathcal{B}_n$  et  $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}$ . Montrer que la série de matrices  $\sum \frac{M^j}{z^{j+1}}$  converge.

*On admettra le fait suivant : soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé de dimension finie ; si  $(v_j)_{j \in \mathbf{N}}$  est une suite d'éléments de  $E$  telle que la série  $\sum N(v_j)$  converge, alors la série  $\sum v_j$  converge dans  $E$ .*

Si  $m \in \mathbf{N}$ , donner une expression simplifiée de  $(zI_n - M) \sum_{j=0}^m \frac{M^j}{z^{j+1}}$ .

En déduire que

$$R_z(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{z^{j+1}}.$$

Pour  $M \in \mathcal{B}_n$ , on définit la fonction

$$\varphi_M : z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D} \mapsto (|z| - 1) \|R_z(M)\|_{\text{op}}.$$

- 8** ▷ Déduire de la question précédente l'inégalité

$$(1) \quad \forall M \in \mathcal{B}_n, \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}, \quad \varphi_M(z) \leq b(M).$$

Soit  $(c_j)_{j \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres complexes telle que la série  $\sum c_j$  converge absolument. On pose

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad u(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}.$$

- 9** ▷ Justifier l'existence et la continuité de la fonction  $u$ .

Pour  $k \in \mathbf{N}$ , montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) e^{i(k+1)t} dt = c_k.$$

- 10** ▷ Soient  $M \in \mathcal{B}_n$ ,  $r \in ]1, +\infty[$  et  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$ . Déterminer une suite de nombres complexes  $(c_j)_{j \in \mathbf{N}}$  telle que la série  $\sum c_j$  converge absolument et que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad X^T R_{re^{it}}(M) Y = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}.$$

Si  $k \in \mathbf{N}$ , en déduire, en utilisant la question 9, une expression intégrale de  $X^T M^k Y$ .

## 4 Variation totale et norme uniforme

Soit  $\mathcal{C}^1$  l'espace des fonctions de classe  $C^1$  de  $[-\pi, \pi]$  dans  $\mathbf{C}$ . Pour  $f \in \mathcal{C}^1$ , on pose

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| ; t \in [-\pi, \pi]\} \quad \text{et} \quad V(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|.$$

**11** ▷ En considérant une suite de fonctions bien choisie, montrer qu'il n'existe pas d'élément  $C$  de  $\mathbf{R}^{+*}$  tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1, \quad V(f) \leq C \|f\|_\infty.$$

Soit  $f \in \mathcal{C}^1$  à valeurs réelles. On suppose que l'ensemble  $C(f)$  des points de  $] -\pi, \pi[$  en lesquels la fonction  $f'$  s'annule est fini. On note  $\ell$  le cardinal de  $C(f)$  et, si  $\ell \geq 1$ , on désigne par  $t_1 < \dots < t_\ell$  les éléments de  $C(f)$ . On pose  $t_0 = -\pi$  et  $t_{\ell+1} = \pi$ .

**12** ▷ Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|.$$

Pour  $0 \leq j \leq \ell$ , soit  $\psi_j$  la fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\{0, 1\}$  égale à 1 sur  $[f(t_j), f(t_{j+1})[$  et à 0 sur  $\mathbf{R} \setminus [f(t_j), f(t_{j+1})[$ . Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j.$$

**13** ▷ Si  $y \in \mathbf{R}$ , montrer que l'ensemble  $f^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[$  est fini de cardinal majoré par  $\ell + 1$  ; on note  $N(y)$  ce cardinal.

Si  $y \in \mathbf{R}$ , exprimer  $N(y)$  en fonction de  $\psi_0(y), \dots, \psi_\ell(y)$ . En déduire l'inégalité

$$(2) \quad V(f) \leq 2 \max\{N(y) ; y \in \mathbf{R}\} \|f\|_\infty.$$

## 5 L'inégalité de Spijker

On appelle fraction rationnelle tout quotient  $F = \frac{P}{Q}$  où  $P \in \mathbf{C}[X]$  et  $Q \in \mathbf{C}[X] \setminus \{0\}$ . Une telle fraction peut s'écrire sous la forme précédente de façon que  $P$  et  $Q$  n'aient pas de racine commune dans  $\mathbf{C}$  ; si tel est le cas, les racines de  $Q$  dans  $\mathbf{C}$  sont, par définition, les pôles de  $F$ . On note  $\mathcal{R}_n$  l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans  $\mathbb{U}$  de la forme  $\frac{P}{Q}$  où  $P$  et  $Q$  sont deux éléments de  $\mathbf{C}_n[X]$ .

Soient, dans la suite de cette partie,  $F \in \mathcal{R}_n$ ,  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $\mathbf{C}_n[X]$  vérifiant  $F = \frac{P}{Q}$  et

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad Q(z) \neq 0.$$

Pour  $t \in [-\pi, \pi]$ , on pose

$$f(t) = F(e^{it}) = g(t) + ih(t) \quad \text{où} \quad (g(t), h(t)) \in \mathbf{R}^2.$$

Pour  $u \in [-\pi, \pi]$ , on définit une fonction  $f_u$  de  $[-\pi, \pi]$  dans  $\mathbf{R}$  par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f_u(t) = g(t) \cos(u) + h(t) \sin(u) = \operatorname{Re}(e^{-iu} F(e^{it})) = \operatorname{Re}(e^{-iu} f(t)).$$

- 14**  $\triangleright$  Dans cette question, on fixe  $u \in [-\pi, \pi]$  et on suppose que  $f_u$  n'est pas constante. On fixe également  $y \in \mathbf{R}$ . En utilisant éventuellement l'expression de  $f_u(t)$  comme partie réelle de  $e^{-iu} F(e^{it})$  et la formule d'Euler pour la partie réelle, déterminer  $S \in \mathbf{C}_{2n}[X]$  tel que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f_u(t) = y \iff S(e^{it}) = 0.$$

En déduire que l'ensemble  $f_u^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[$  est fini de cardinal majoré par  $2n$ .

- 15**  $\triangleright$  En observant que la fonction  $|\cos|$  est  $2\pi$ -périodique, calculer, pour  $\omega \in \mathbf{R}$ , l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u - \omega)| \, du.$$

En déduire que, si  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a \cos(u) + b \sin(u)| \, du = 4 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- 16**  $\triangleright$  Exprimer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f_u'(t)| \, du \right) dt$$

en fonction de  $V(f)$ .

- 17**  $\triangleright$  On admet l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f_u'(t)| \, du \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f_u'(t)| \, dt \right) du.$$

On admet aussi que, pour  $u \in [-\pi, \pi]$  tel que  $f_u$  ne soit pas constante, l'ensemble des points de  $] -\pi, \pi[$  en lesquels la fonction  $f_u'$  s'annule est fini (ce que l'on pourrait établir en raisonnant comme dans la question 14  $\triangleright$ ).

En déduire l'inégalité

$$(3) \quad V(f) \leq 2\pi n \|f\|_\infty.$$

## 6 La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

Soit  $M \in \mathcal{B}_n$ . L'inégalité (1) de la question 8 justifie la définition de

$$b'(M) = \sup \{ \varphi_M(z) ; z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D} \}.$$

et entraîne que  $b'(M) \leq b(M)$ . On se propose de majorer  $b(M)$  en fonction de  $b'(M)$ .

Dans les questions 18  $\triangleright$  et 19  $\triangleright$ , on fixe  $r \in ]1, +\infty[$  et  $(X, Y) \in \Sigma_n^2$ . Pour  $\rho \in \mathbf{R}^{+*}$ , on note

$$\mathbb{D}_\rho = \{z \in \mathbf{C} ; |z| \leq \rho\}.$$

18  $\triangleright$  Montrer qu'il existe un élément  $F_r$  de  $\mathcal{R}_n$  dont les pôles sont tous dans  $\mathbb{D}_{1/r}$  et tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}_{1/r}, \quad |F_r(z)| \leq \frac{b'(M)}{r|z| - 1}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(e^{it}) e^{i(k+1)t} dt.$$

19  $\triangleright$  En utilisant la question précédente, une intégration par parties et l'inégalité (3) de la question 17  $\triangleright$ , montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad |X^T M^k Y| \leq \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)} n b'(M).$$

20  $\triangleright$  Démontrer finalement l'inégalité

$$(4) \quad b(M) \leq en b'(M).$$

Ce résultat de M.N. Spijker (1991) améliore un théorème de H.O. Kreiss (1962). La constante  $en$  est asymptotiquement optimale.

FIN DU PROBLÈME