Quelques inégalités de convexité autour du déterminant

Notations et résultats admis

— Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbf{R})$ (resp. $M_{n,1}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients réels.

— La matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$ est notée I_n.

— Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\det(A)$ est le déterminant de la matrice A, $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, $\mathrm{Sp}(A)$ son spectre et $A^\top$ sa transposée.

— On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels de taille $n \times n$.

— Sur $M_{n,1}(\mathbf{R})^2$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\forall (X,Y) \in M_{n,1}(\mathbf{R})^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

où $X^\top$ est la transposée de X. On admet que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbf{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

— On admet que l'application $A \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)}$ est une norme sur $M_n(\mathbf{R})$.

— On note $S_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques $S \in S_n(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle SX, X \rangle \geq 0 \ \text{(resp. } > 0\text{)}.$$

— Soit C une partie non vide d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. On dit que C est convexe si : pour tous $x, y \in C$ et pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in C$.

— On admet que si C est une partie convexe d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, alors pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in C^p$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in C$.

— Une application $f : C \to \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel

E est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in C^2,\ \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y).$$

— Une application $f : C \to \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E est dite concave si son opposé, $-f$, est convexe, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in C^2,\ \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \geq (1-t) f(x) + t f(y).$$

Partie 1 : Questions préliminaires

1 ▷ Montrer qu'une matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$ appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+$.

De même, on admettra dans la suite du problème que : $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+^\star$.

2 ▷ Montrer que $S_n^+(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ sont des parties convexes de $M_n(\mathbf{R})$. Sont-elles des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$?

3 ▷ Montrer que, si $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = S^2$.

4 ▷ Soit I intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in I^p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

Indication : On pourra procéder par récurrence sur p.

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

Soit $M \in S_n^+(\mathbf{R})$ une matrice non nulle.

5 ▷ Montrer l'inégalité $\dfrac{\operatorname{Tr}(M)}{n} \geq \det{}^{1/n}(M)$.

Indication : On pourra montrer que $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^\star$.

On pourra dans la suite de cette partie utiliser, sans la prouver, l'inégalité ci-dessous

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n,$$
$$2 \max\{x_1, \ldots, x_n\} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n} \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \prod_{j=1}^{n} x_j^{1/n} \right)^2.$$

6 ▷ Exprimer $\|M\|_2$ en fonction des valeurs propres de M.

7 ▷ En déduire que

$$\frac{\operatorname{Tr}(M)}{n} - \det{}^{1/n}(M) \geq \frac{\left\| M - \det{}^{1/n}(M)\, I_n \right\|_2^2}{2n \|M\|_2}.$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8 ▷ Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Indication : On pourra utiliser la question 3.

9 ▷ Étudier la convexité de la fonction $t \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^t)$.

10 ▷ Montrer l'inégalité

$$\forall (A, B) \in S_n^{++}(\mathbf{R})^2, \quad \det{}^{1/n}(A + B) \geq \det{}^{1/n}(A) + \det{}^{1/n}(B).$$

11 ▷ Montrer que, si A et B appartiennent $S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \det((1 - t) A + tB) \geq \det(A)^{1-t} \det(B)^t.$$

Justifier que cette inégalité reste valable pour A et B seulement dans $S_n^{+}(\mathbf{R})$.

12 $\triangleright$ Que peut-on en déduire sur la fonction $\ln \circ \det$ sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Partie 4 : Encore de la convexité !

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et soit $g : t \in \mathbf{R} \mapsto \det(I_n + tA)$.

13 $\triangleright$ Exprimer, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g(t)$ à l'aide des valeurs propres de A. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

14 $\triangleright$ Soit $f : t \mapsto \ln(\det(I_n + tA))$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \ln(\det(I_n + tA)) \leq \mathrm{Tr}(A)\, t.$$

Partie 5 : Et pour finir... de la convexité !

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $M \in S_n(\mathbf{R})$. Soit l'application f_A définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_A(t) = \det(A + tM).$$

15 $\triangleright$ Montrer que f_A est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

16 $\triangleright$ Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, $A + tM \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

17 $\triangleright$ Montrer que $f_A(t) \underset{t \to 0}{=} \det(A) + \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}M)t + o(t)$.

Indication : On pourra commencer par traiter le cas où $A = I_n$.

18 $\triangleright$ Déterminer $f_A'(t)$ pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

19 $\triangleright$ On admet que la fonction $\Phi : t \mapsto (A + tM)^{-1}$ est de classe C^1 sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. En remarquant que $\Phi(t) \times (A + tM) = I_n$, montrer que

$$\Phi(t) \underset{t \to 0}{=} A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t).$$

Soit $\alpha \in \left]-\frac{1}{n}, +\infty\right[\setminus \{0\}$. On définit l'application φ_α par

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \ \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A + tM).$$

20 ▷ Montrer que φ_α est dérivable sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi_\alpha'(t) = -\mathrm{Tr}\left((A + tM)^{-1}M\right) \det{}^{-\alpha}(A + tM).$$

21 ▷ Montrer que φ_α est deux fois dérivable en 0 et que

$$\varphi_\alpha''(0) = \det{}^{-\alpha}(A) \left(\alpha \mathrm{Tr}^2(A^{-1}M) + \mathrm{Tr}\left((A^{-1}M)^2\right)\right).$$

22 ▷ Montrer que $A^{-1}M$ est semblable à une matrice symétrique réelle.

Indication : On pourra utiliser la question 3.

23 ▷ En déduire que $\varphi_\alpha''(0) \geq 0$.

24 ▷ Montrer que, si $\varphi_\alpha''(0) > 0$, alors il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$,

$$\frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A + tM) \geq \frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A) - \mathrm{Tr}(A^{-1}M) \det{}^{-\alpha}(A) t.$$

Fin du problème