

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

— On note (x, y) (resp. $X^T Y$) le produit scalaire euclidien usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbf{R}^n$ (resp. X et Y de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié canoniquement à $\mathbb{R}^n$) et $\|x\|$ la norme de x (resp. $\|X\|$ la norme de X) associée au produit scalaire.

— Etant donnés deux points P et P' de $\mathbf{R}^n$, on note $d(P, P')$ la distance entre P et P' associée à la norme euclidienne usuelle :

$$d(P, P') = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}\|$$

où O est le point origine.

— Un endomorphisme symétrique f de $\mathbf{R}^n$ est dit *positif* si

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, (x, f(x)) \geq 0$$

Une matrice symétrique A de $M_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0.$$

— Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$. Un endomorphisme symétrique f de $\mathbf{R}^n$ est positif si, et seulement si, sa matrice (symétrique) dans $\mathcal{B}$ est positive.

— On appelle *matrice de distance euclidienne* (on notera MDE pour abréger) une matrice carrée $D = (d_{i,j})$ d'ordre n telle qu'il existe un entier naturel non nul m et des points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathbf{R}^m$ tels que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ on a :

$$d_{i,j} = d(A_i, A_j)^2.$$

On se propose dans ce sujet d'apporter une réponse partielle au problème consistant à déterminer, étant donnés des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, une MDE de spectre $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On admet sans démonstration dans ce sujet que des endomorphismes symétriques de $\mathbf{R}^n$ sont positifs si et seulement si leur spectre est inclus dans $[0, +\infty[$.

1 Matrices de Hadamard

On appelle *matrice de Hadamard* d'ordre n toute matrice H carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1 et telle que $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ soit orthogonale.

- 1 ▷ Donner des exemples de matrices de Hadamard d'ordre 1 et 2.
- 2 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard alors toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de H par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de H est encore une matrice de Hadamard.
- 3 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1. En déduire que si $n \geq 2$ alors n est pair.
- 4 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4, alors n est multiple de 4. On pourra commencer par montrer que l'on peut supposer la première ligne de H uniquement composée de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1 .

2 Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^n$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres classées par ordre croissant de f . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on introduit l'ensemble π_k des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de dimension k . On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérées).

- 5 ▷ Justifier l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de f , le vecteur e_i étant associé à λ_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On garde par la suite cette base.
- 6 ▷ Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et S_k un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension k . On pose $T_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$. Justifier que $S_k \cap T_k \neq \{0\}$.
- 7 ▷ En considérant $x \in S_k \cap T_k$, justifier que :

$$\max_{x \in S_k, \|x\|=1} (x, f(x)) \geq \lambda_k.$$

8 ▷ Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A l'aide de $S = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \in \pi_k$, montrer l'égalité :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right)$$

C'est le théorème de Courant-Fischer. On aura également besoin par la suite du résultat de factorisation suivant :

9 ▷ Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que si M est positive, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = B^T \cdot B$. En déduire que si M n'est plus supposée positive, mais admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u , alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = \lambda u \cdot u^T - B^T \cdot B$.

3 Caractérisation des MDE

On note $\mathbf{e}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note Δ_n l'ensemble des MDE d'ordre n et Ω_n l'ensemble des matrices M symétriques positives d'ordre n telles que $M \cdot \mathbf{e} = 0$. On note enfin P la matrice d'ordre n définie par

$$P = I_n - \frac{1}{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T$$

On note T l'application de Δ_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui à D associe

$$T(D) = -\frac{1}{2} P D P$$

et K l'application de Ω_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui à une matrice A associe

$$K(A) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T - 2A$$

où $\mathbf{a}$ est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont les coefficients diagonaux de A .

10 ▷ Montrer que P est symétrique et que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé est une projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$.

11 ▷ Soit $D \in \Delta_n$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des points dont la matrice D est la matrice de distance euclidienne. On note x_i les vecteurs coordonnées des A_i . Soit M_A la matrice dont les colonnes sont les x_i et C la colonne formée des $\|x_i\|^2$. Ecrire D comme combinaison linéaire de $C \mathbf{e}^T$, $\mathbf{e} C^T$ et $M_A^T \cdot M_A$. En déduire que pour toute matrice D de Δ_n on a $T(D) \in \Omega_n$.

12 ▷ Montrer que pour toute matrice A de Ω_n on a $K(A) \in \Delta_n$.

13 ▷ Montrer que les applications $T : \Delta_n \rightarrow \Omega_n$ et $K : \Omega_n \rightarrow \Delta_n$ vérifient :

$$T \circ K = \text{Id}_{\Omega_n}.$$

On peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que l'on a également $K \circ T = \text{Id}_{\Delta_n}$ et que ces deux applications sont bijections réciproques l'une de l'autre.

14 ▷ Montrer qu'une matrice symétrique D d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle est MDE si et seulement si $-\frac{1}{2}PDP$ est positive.

15 ▷ Montrer que toute matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre $\mathbf{e}$ est MDE.

4 Spectre des MDE

On conserve ici les notations de la partie précédente.

16 ▷ Préciser la somme $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ des valeurs propres d'une MDE d'ordre n .

17 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Montrer que pour tout $x \in \text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$, on a

$$x^T D x \leq 0.$$

18 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant. Montrer

$$\lambda_{n-1} \leq 0$$

et en déduire que D a exactement une valeur propre strictement positive.

5 Problème inverse pour les MDE

Soit H une matrice de Hadamard d'ordre n et de première ligne constante égale à 1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

et

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0.$$

On note U la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ et Λ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i . On note enfin $D = U^T \Lambda U$.

- 19** ▷ Montrer que D est symétrique, à coefficients positifs et à diagonale nulle, et a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, avec λ_1 d'espace propre de dimension 1.
- 20** ▷ Montrer que D est MDE.
- 21** ▷ Donner une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 telle que son spectre soit $\{5, -1, -2, -2\}$.

Remarquons pour finir que la portée de ce résultat est à nuancer, car outre les conditions sur les ordres possibles pour les matrices de Hadamard, on ne sait même pas s'il existe de telles matrices pour tout ordre multiple de 4 ! D'autre part, il existe évidemment des matrices de distance euclidienne d'ordre impair...

FIN DU PROBLÈME