Matrices de Hurwitz

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans $\mathbf{K}$ et pour une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- $\mathbf{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- $\text{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \text{Re}(z) < 0\}$.
- On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée :

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$
$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$

avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

- Pour $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on notera son conjugué $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, sa partie réelle $\text{Re}(X) = \frac{X + \bar{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\text{Im}(X) = \frac{X - \bar{X}}{2i}$.
- Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (respectivement $\mathbf{C}^n$) canoniquement associé à M est

$$\begin{array}{l} \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \\ X \mapsto MX \end{array} \quad \left(\text{respectivement} \quad \begin{array}{l} \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n \\ X \mapsto MX \end{array} \right)$$

Rappels

- 1) Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{K})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{K})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
- 2) Soient R et S deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$. R est un diviseur de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbf{K}[X]$ tel que $S = QR$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Objectifs

- Il s'agit d'établir pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une équivalence entre des propriétés qualitatives des solutions et des conditions portant sur la nature de la matrice associée à ce système et de son polynôme caractéristique.
- La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
- La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.
- La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.
- La partie 4, sur l'équivalence annoncée pour les systèmes différentiels, utilise des résultats des parties 1 et 3.

1 Matrices semi-simples

Définition 1 Une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **semi-simple** si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.

Définition 2 Une matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **presque diagonale** s'il existe :

- i)* deux entiers naturels p et q ;
- ii)* q réels $a_1, a_2, \dots, a_q$;
- iii)* q réels non nuls $b_1, b_2, \dots, b_q$;
- iv)* une matrice D diagonale de $M_p(\mathbf{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où, $\forall j \in \llbracket 1 ; q \rrbracket : M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M . De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1 ▷ La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2 ▷ Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B , introduire les vecteurs $W_1 = \operatorname{Re}(V)$ et $W_2 = \operatorname{Im}(V)$.

Soit M une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\bar{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

3 ▷ Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbf{R})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

4 ▷ Démontrer que M est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- i) M est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$;
- ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

5 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

6 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbf{C}[X]$, en précisant dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

2 Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E .

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Soit F un sous-espace vectoriel de E , différent de $\{0_E\}$ et de E .

- 7 ▷ Démontrer qu'il existe $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

On note alors

$$\mathcal{A} = \left\{ H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\} \right\}$$

et

$$\mathcal{L} = \left\{ p \in \mathbf{N}^* \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H) \right\}.$$

- 8 ▷ Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r .
- 9 ▷ Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E , stable par u .
- 10 ▷ On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E , stable par u . Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n - 1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u .

3 Polynômes de Hurwitz

Définition 3 Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit polynôme de Hurwitz si ses racines dans $\mathbf{C}$ appartiennent à $\text{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \text{Re}(z) < 0\}$.

Définition 4 Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit à coefficients strictement positifs s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où, pour tout $k \in [0, d]$, $a_k > 0$

- 11 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.
- 12 ▷ Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.
- 13 ▷ Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbf{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbf{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2} (X - z_k - z_l)$$

- 14 ▷ On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?
- 15 ▷ Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.
- 16 ▷ Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbf{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

4 Système différentiel de matrice associée semi-simple

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note (S) le système différentiel :

$$(S) \quad X' = MX$$

où X est une application de la variable t de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$, dérivable sur $\mathbf{R}$.

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que M est semblable à T dans $M_n(\mathbf{R})$ et on note (S^*) le système différentiel

$$(S^*) \quad Y' = TY$$

- 17 ▷ Démontrer que les coordonnées d'une solution X de (S) sont combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution Y de (S^*) .

Dans les deux questions suivantes 18) et 19), on suppose $n = 2$, on note alors $X = (x; y)$ où x et y sont deux fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et on pose $z = x + iy$.

On suppose qu'il existe a et b réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

- 18 ▷ Démontrer que X est solution de (S) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer. En déduire une expression, en fonction de t , des coordonnées des solutions de (S) .

Résoudre le système $X' = BX$ où B est la matrice de la question 2).

- 19 ▷ Soit $M \in M_2(\mathbf{R})$ semi-simple. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de M , pour que toute solution de (S) ait chacune de ses coordonnées qui tende vers 0 en $+\infty$.

On reprend le cas général $n \geq 2$ et on considère les assertions suivantes :

A₁ χ_M est un polynôme de Hurwitz ;

A₂ Les solutions de (S) tendent vers $0_{\mathbf{R}^n}$ quand t tend vers $+\infty$;

A₃ Il existe $\alpha > 0$, il existe $k > 0$ tels que pour toute solution Φ de (S) ,

$$\forall t \geq 0 \quad : \quad \|\Phi(t)\| \leq ke^{-\alpha t} \|\Phi(0)\|.$$

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que T vérifie la condition suivante :

$$(C) \quad \exists \beta \in \mathbf{R}_+^*, \forall X \in \mathbf{R}^n : \langle TX, X \rangle \leq -\beta \|X\|^2.$$

20 ▷ Démontrer que A_3 est vraie avec $k = 1$ pour toute solution Φ de (S^*) .

Indication : on pourra introduire la fonction $t \mapsto e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2$.

21 ▷ On suppose que $M \in M_n(\mathbf{R})$ est semi-simple. Démontrer que les assertions A_1 , A_2 et A_3 sont équivalentes.

Indication : on pourra commencer par A_3 implique A_2 .

FIN DU PROBLÈME