

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2013

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PSI

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I — PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires pertinents (incluant des considérations numériques), même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

MODULATION ACOUSTO-OPTIQUE

Ce problème comporte trois parties largement indépendantes. La première partie fait établir l'équation de propagation d'ondes acoustiques dans un milieu compressible. Dans une deuxième partie, une modélisation d'un modulateur acousto-optique (MAO) est présentée. Le MAO est un outil très utile en optique : il peut modifier la direction et la fréquence d'une fraction de la lumière le traversant. La troisième et dernière partie étudie une application utilisant un MAO : la méthode de détection hétérodyne.

Dans tout le problème, **exprimer** signifie donner l'expression littérale et **calculer** signifie donner le meilleur ordre de grandeur possible de la valeur numérique.

Les vecteurs seront surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\hat{e}$), ou d'une flèche dans le cas général ($\vec{a}$). À l'exception de j , tel que $j^2 = -1$, les nombres complexes seront soulignés.

Constantes numériques :

- ◇ constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- ◇ exposant adiabatique : $\gamma = 5/3$ (resp. $\gamma = 7/5$) pour un gaz parfait monoatomique (resp. diatomique) ;
- ◇ masse molaire moyenne de l'air : $M = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

I. — Ondes acoustiques dans un milieu compressible

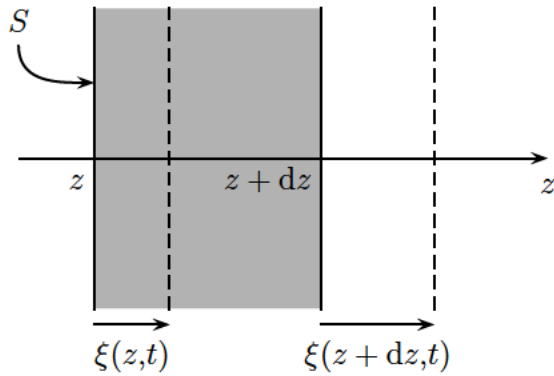


FIGURE 1 — Déformation du milieu lors du passage d'une onde sonore se propageant selon $\hat{e}_z$.

On considère un milieu compressible et homogène caractérisé, au repos, par sa masse volumique ρ_0 uniforme, et au sein duquel règnent une température T_0 et une pression P_0 uniformes (pesanteur négligée). Pour décrire la déformation du milieu, on considère une tranche (système fermé) de section S et d'épaisseur dz initialement au repos. Sous l'effet d'une perturbation se propageant dans la direction z , la tranche élémentaire, repérée au repos par l'abscisse z , est déplacée d'une distance $\xi(z,t)$ à un instant t (voir figure 1). La grandeur ξ est appelée champ de déplacement acoustique. On note $P(z,t)$ et $\rho(z,t)$ respectivement la pression et la masse volumique de cette tranche élémentaire à un instant t quelconque. On définit enfin par $\vec{v}(z,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \hat{e}_z$ la vitesse de cette tranche.

- ❑ 1 — Déterminer, par conservation de la masse, la relation liant $\rho(z,t)$ à ρ_0 et $\frac{\partial \xi}{\partial z}$.
- ❑ 2 — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la tranche de fluide initialement au repos entre les abscisses z et $z + dz$, établir la relation liant ρ_0 , $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial P}{\partial z}$.
- ❑ 3 — En déduire que $\xi(z,t)$ vérifie l'équation différentielle suivante, où $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_s$ est le coefficient de compressibilité isentropique du milieu :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s \rho_0} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)}.$$

- ❑ 4 — On se place dans l'approximation acoustique où l'on suppose l'inégalité $\left| \frac{\partial \xi}{\partial z} \right| \ll 1$.

Montrer que le champ de vitesse $v(z,t)$ vérifie alors une équation de propagation de d'Alembert. Exprimer la célérité c_0 des ondes acoustiques. Donner la forme générale d'une solution sinusoïdale progressive d'amplitude v_0 , de pulsation temporelle Ω et se propageant dans le sens des z croissants avec un vecteur d'onde $\vec{K} = K \hat{e}_z$. Exprimer la norme de $\vec{K}$ en fonction des données.

- ❑ 5 — Exprimer la célérité du son dans l'air, notée c_{air} , en fonction de grandeurs pertinentes puis calculer sa valeur dans le cas d'une propagation isentropique dans l'air, assimilé à un gaz parfait à la température $T_0 = 300$ K. Comparer la valeur obtenue à l'ordre de grandeur (que l'on précisera) de la célérité c_{sol} des ondes sonores dans un solide.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Modèle du modulateur acousto-optique (MAO)

On s'intéressera dans un premier temps à la réflexion d'une onde lumineuse sur un dioptré plan, préalable nécessaire à la modélisation d'un MAO. On note c la célérité de la lumière dans le vide.

On considère deux milieux, diélectriques (isolants) transparents, non chargés, linéaires, homogènes et isotropes d'indices réels respectifs n et n' dont l'interface de séparation est le dioptré plan d'équation $z = 0$. Le milieu d'indice n occupe le demi-espace $z > 0$ et le milieu d'indice n' le demi-espace $z < 0$ (voir figure 2).

Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation temporelle ω se propage dans le milieu d'indice n . Dans le référentiel centré sur O , on note $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp \left[j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM}) \right] \hat{e}_y$ la représentation complexe du champ électrique au point M associé à cette onde. En notant c la célérité de la lumière dans le vide, le vecteur d'onde $\vec{k}_i = \frac{n\omega}{c} \hat{e}_i$ définit l'angle d'incidence θ par rapport à la normale au dioptré.

En notation complexe, les champs électriques réfléchis et transmis s'écrivent :

- ◇ $\vec{E}_r(M, t) = \mathcal{R} E_0 \exp \left[j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM}) \right] \hat{e}_y$, où le vecteur d'onde $\vec{k}_r = \frac{n\omega}{c} \hat{e}_r$ définit l'angle de réflexion θ_r .
- ◇ $\vec{E}_t(M, t) = \mathcal{T} E_0 \exp \left[j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{OM}) \right] \hat{e}_y$, où le vecteur d'onde $\vec{k}_t = \frac{n'\omega}{c} \hat{e}_t$ définit l'angle de réfraction θ' .

Exceptionnellement, les coefficients $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ de réflexion et de transmission *en amplitude* ont été notés avec des majuscules pour éviter de confondre $\mathcal{T}$ et le temps t .

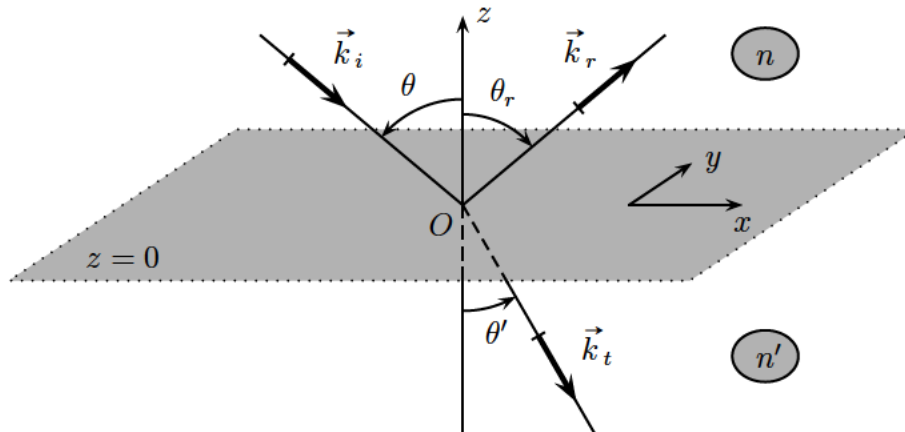


FIGURE 2 – Réflexion et réfraction d'une onde lumineuse sur un dioptré plan.

❑ 6 — À partir de considérations sur la polarisation des ondes planes incidente, réfléchie et transmise, déduire les valeurs de k_{iy} , k_{ry} et k_{ty} , composantes selon y des vecteurs d'onde incident, réfléchi et transmis respectivement. Montrer que l'on peut restreindre le domaine d'étude à un plan que l'on précisera.

❑ 7 — Démontrer les lois de Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction à l'interface entre les deux milieux.

❑ 8 — Déterminer les expressions (en complexes) des champs magnétiques $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_t$ (champs incident, réfléchi et transmis respectivement) dans la base $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$. Expliquer pourquoi le champ magnétique est continu à l'interface entre les deux milieux. En traduisant cette continuité, montrer que les expressions des coefficients de réflexion $\mathcal{R}$ et de transmission

$\mathcal{T}$ en amplitude à l'interface s'écrivent :

$$\mathcal{R} = \frac{n \cos \theta - n' \cos \theta'}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \frac{2n \cos \theta}{n \cos \theta + n' \cos \theta'}.$$

On se place dans le cas particulier d'un faible saut d'indice de part et d'autre du dioptre. On note alors $n' = n + \delta n$ et $\theta' = \theta + \delta \theta$ où δn et $\delta \theta$ sont des infiniment petits d'ordre 1.

❑ 9 — Au premier ordre, déterminer la relation liant $\delta \theta$ à n , δn et θ .

❑ 10 — Montrer que, au premier ordre, l'expression du coefficient de réflexion du dioptre peut alors s'écrire sous la forme $\frac{-\delta n}{2n \cos^2 \theta}$. On notera $\delta \mathcal{R}$ cette expression dans la suite.

Un modulateur acousto-optique est un cristal dans lequel se propage une onde acoustique plane générée par une céramique piézoélectrique dans la direction Oz . On suppose que le passage de l'onde sonore dans ce milieu entraîne une modulation de son indice $n(M, t)$ telle que :

$$n(M, t) = n_0 + n_1 \cos(\Omega t - Kz)$$

où n_0 représente l'indice du milieu non perturbé et n_1 l'amplitude de la modulation d'indice avec $n_1 \ll n_0$. On note Ω la pulsation temporelle et $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$ la pulsation spatiale (norme du vecteur d'onde) associées à l'onde acoustique de longueur d'onde Λ dans le milieu. On modélise le cristal (d'épaisseur e dans la direction Oz) comme une succession continue de tranches infinitésimales d'épaisseur $dz \ll e$ et de grandes dimensions selon Ox et Oy .

Ce cristal est traversé par une onde lumineuse de pulsation temporelle ω , de longueur d'onde dans le milieu λ et dont le vecteur d'onde est $\vec{k}$, avec $\|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$ (voir figure 3).

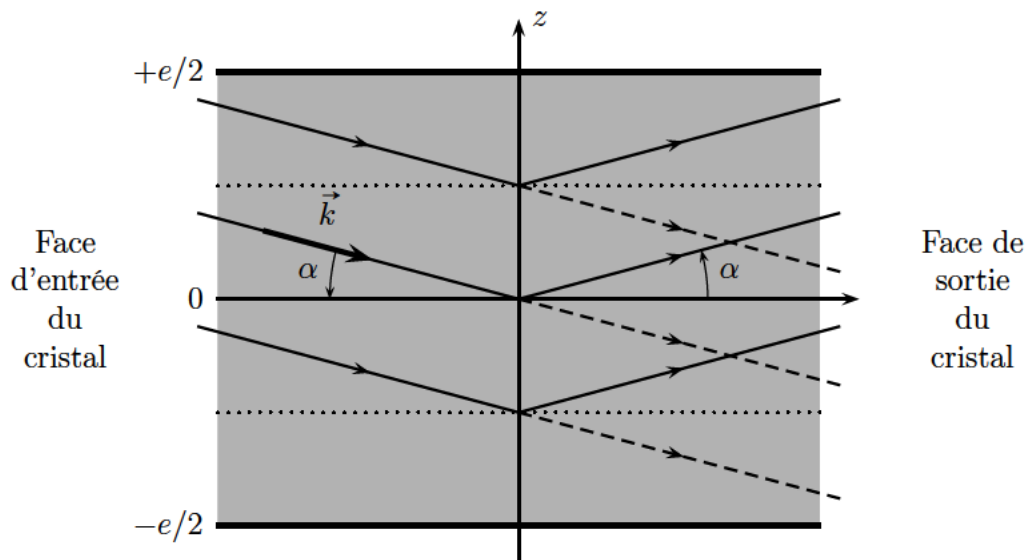


FIGURE 3 – Interaction d'une onde lumineuse et d'un milieu perturbé par le passage d'une onde acoustique.

L'indice du milieu étant partout très peu différent de sa valeur moyenne n_0 , on pourra considérer en bonne approximation que la lumière se propage en ligne droite et garde une amplitude pratiquement constante égale à E_0 . Cependant, chaque tranche d'épaisseur dz peut être considérée comme un faible saut d'indice $\delta n = \frac{\partial n}{\partial z} dz$ et réfléchit une onde élémentaire d'amplitude très faible devant E_0 .

On note α l'angle complémentaire de l'angle θ introduit précédemment. L'angle α correspond donc, au signe près, à l'angle d'incidence de l'onde lumineuse sur la face d'entrée du cristal (on néglige le phénomène de réfraction lorsque la lumière pénètre dans le cristal). En résumé, on ne tient compte de la non uniformité de l'indice que pour expliquer le phénomène de réflexion.

□ **11** — Exprimer le coefficient de réflexion $\delta\mathcal{R}(z,t)$ au niveau d'un plan d'équation $z = \text{cte}$ (interface entre deux couches consécutives) en fonction de α , dz et des données relatives à l'indice du milieu. On rappelle que $n \simeq n_0$ en tout point du cristal.

□ **12** — On choisit comme référence de phase l'onde réfléchiée par l'interface $z = 0$. Exprimer, en fonction de α , k et z , le déphasage $\phi(z)$ de l'onde élémentaire réfléchiée par l'interface z par rapport à celle réfléchiée par l'interface $z = 0$.

□ **13** — La superposition des ondes élémentaires réfléchiées par chaque interface constitue l'onde totale réfléchiée dont la représentation scalaire complexe $\underline{E}_r$ s'exprime sous la forme

$$\underline{E}_r = \int_{-e/2}^{e/2} \delta\mathcal{R} E_0 \exp[j(\omega t + \phi(z))].$$

En introduisant la fonction sinus cardinal définie par $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $\text{sinc } x = 1$ pour $x = 0$, montrer que :

$$\underline{E}_r = \underline{A} \exp(j\omega t) \left[\exp(j\beta(t)) \text{sinc} \left((K - 2k \sin \alpha) \frac{e}{2} \right) - \exp(-j\beta(t)) \text{sinc} \left((K + 2k \sin \alpha) \frac{e}{2} \right) \right]$$

où l'on précisera les expressions des grandeurs $\underline{A}$ et $\beta(t)$.

□ **14** — Montrer que les deux termes contribuant à l'amplitude de l'onde réfléchiée sont respectivement maximaux pour deux valeurs de α opposées, notées $\pm\alpha_B$ et appelées *angles de Bragg*. On donnera l'expression de $\alpha_B > 0$ en fonction de k et K puis en fonction de λ et Λ . L'angle α_B existe-t-il toujours ?

□ **15** — Vérifier que, à l'incidence de Bragg, les ondes élémentaires réfléchiées aux interfaces z et $z + \Lambda$ interfèrent de manière constructive.

□ **16** — On donne $e \simeq 2,0 \text{ mm}$, $\Lambda \simeq 50 \text{ }\mu\text{m}$, $n_0 \simeq 2,0$ et la longueur d'onde *dans le vide* de l'onde lumineuse $\lambda_0 \simeq 0,60 \text{ }\mu\text{m}$. Montrer que le profil de l'intensité lumineuse (ou éclaircissement) réfléchiée en fonction de $\sin \alpha$ se limite en bonne approximation à deux pics très étroits centrés sur $\pm \sin \alpha_B$ et dont on précisera (littéralement et numériquement) la largeur, notée $\Delta \sin \alpha$. On envisage alors le cas $\alpha = +\alpha_B$. Montrer que l'onde lumineuse réfléchiée est décalée en fréquence par rapport à l'onde incidente (et transmise). Caractériser ce décalage.

FIN DE LA PARTIE II

III. — Interférométrie hétérodyne

Un faisceau laser Hélium-Néon ($\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$) est envoyé sous incidence de Bragg ($\alpha = \alpha_B$) à travers le modulateur acousto-optique modélisé dans la partie II. Deux faisceaux émergent du dispositif : le faisceau transmis (*ordre 0*), non dévié et de pulsation temporelle ω , est séparé du faisceau réfléchi (*ordre 1*), de pulsation $\omega + \Omega$. Ces faisceaux sont ensuite recombinaés au moyen de deux miroirs et d'une lame semi-réfléchissante (analogue à la séparatrice d'un interféromètre de Michelson). On enregistre l'intensité lumineuse totale sur un détecteur (photodiode) dont le temps de réponse τ vérifie $\frac{2\pi}{\omega} \ll \tau \ll \frac{2\pi}{\Omega}$ (voir figure 4).

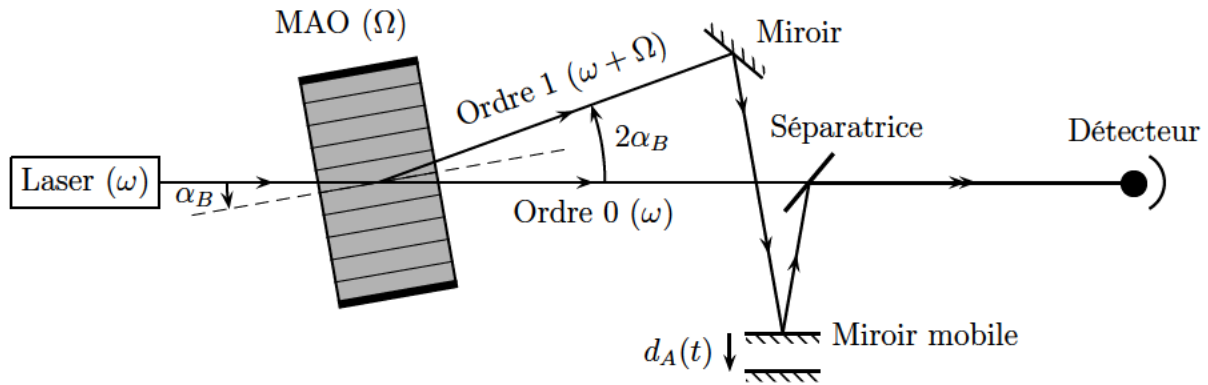


FIGURE 4 – Dispositif expérimental pour l'interférométrie hétérodyne.

On note $\underline{A}_0 = a_0 \exp(j\omega t)$ et $\underline{A}_1 = a_1 \exp[j[(\omega + \Omega)t + \varphi(t)]]$ les vibrations scalaires complexes respectives des champs électriques associés aux ordres 0 et 1 qui interfèrent au niveau du détecteur. La grandeur $\varphi(t)$ représente le déphasage dû à la différence de chemin optique entre ces deux ondes. La photodiode délivre un courant $i(t)$ proportionnel à l'intensité lumineuse reçue sur le détecteur et dont on élimine la composante continue par filtrage. On note $S(t)$ le signal filtré après la sortie du système de détection puis observé à l'analyseur de spectre.

❑ 17 — En quoi l'utilisation d'un MAO rend-il ce montage interférométrique particulier ? Pourquoi parle-t-on d'interférométrie hétérodyne ?

❑ 18 — Déterminer l'intensité lumineuse reçue au niveau du détecteur. En déduire l'expression du signal $S(t)$ en fonction de Ω , t , $\varphi(t)$ et de l'amplitude maximale de $S(t)$ que l'on notera S_0 . L'expérience montre que la qualité de la superposition des deux faisceaux après la lame séparatrice est critique. S'ils ne coïncident pas parfaitement sur la photodiode, le signal $S(t)$ est très faible, voire inexistant. Expliquer pourquoi.

L'un des miroirs (appelé miroir mobile sur la figure 4) est porté par une céramique piézoélectrique excitée par une tension sinusoïdale de fréquence $f = 100$ kHz. Le miroir garde une direction fixe par rapport à la lumière incidente et son mouvement est alors une translation caractérisée par la distance algébrique $d_A(t) = d_0 \sin(2\pi ft)$. On note φ_0 le déphasage dû à la différence de chemin optique entre les rayons d'ordres 0 et 1 lorsque $d_A = 0$.

❑ 19 — Déterminer $\varphi(t)$ en fonction de φ_0 , λ_0 , d_0 , f et de l'angle d'incidence i du faisceau d'ordre 1 sur le miroir mobile (angle entre la normale au miroir mobile et le faisceau frappant ce miroir). Pourquoi dit-on que le signal $S(t)$ est modulé en phase ?

❑ 20 — Exprimer le signal $S(t)$ dans le cas des faibles amplitudes de vibrations du miroir mobile ($d_0 \ll \lambda_0$). On montrera en particulier que l'observation du signal $S(t)$ à l'analyseur de spectre fait apparaître, de part et d'autre d'un pic central à la fréquence $\Omega/2\pi$, deux pics latéraux décalés de $\pm f$ et dont on exprimera l'amplitude S_1 en fonction de S_0 , d_0 , i et λ_0 .

❑ 21 — En déduire qu'une mesure relative des amplitudes S_1 et S_0 permet de déterminer directement l'amplitude d_0 de vibration du miroir. On suppose qu'un analyseur de spectre peut mesurer, sur une échelle en décibels, une variation relative d'amplitude $\frac{S_1}{S_0}$ de -60 dB, ce rapport étant limité par le bruit sur le signal de photodétection. Calculer l'amplitude de vibration minimale $d_{0\min}$ mesurable par cette méthode. On donne $i = 15,0^\circ$. Commenter le résultat. Vérifier également l'approximation initiale des faibles amplitudes de vibrations.

FIN DE LA PARTIE III

FIN DE L'ÉPREUVE