

CONCOURS D'ADMISSION 2005

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Endomorphismes d'espaces fonctionnels

Ce problème a pour but l'étude de certains endomorphismes des espaces de fonctions différentiables et des espaces duaux.

Pour tout entier $n \geq 0$ on désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, de classe C^n , définies sur l'intervalle $[-1, 1]$; pour toute f de E_0 on pose

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|, x \in [-1, 1]\}.$$

Enfin, on munit E_n de la norme π_n définie par

$$\pi_n(f) = \max \{\|f^{(k)}\|, k = 0, 1, \dots, n\}.$$

(On ne demande pas de vérifier que π_n est effectivement une norme).

Première partie

1. Calculer $\pi_n(X^p)$ où $p \in \mathbf{N}$ et où X désigne la fonction $x \mapsto x$.

Pour tout f de E_n , $n \geq 0$ et tout g de E_n , $n \geq 1$, on pose

$$(A_n f)(x) = x f(x) \quad , \quad (B_n g)(x) = \int_0^1 g'(xt) dt \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

2.a) Vérifier que $A_n f$ appartient à E_n , et que $B_n g$ appartient à E_{n-1} .

b) Montrer que A_n est une application linéaire continue de E_n dans lui-même, de norme égale à $n + 1$, et que B_n est une application linéaire continue de E_n dans E_{n-1} , de norme égale à 1.

3. Calculer les produits $B_n A_n$ et $A_{n-1} B_n$, applications de E_n dans E_{n-1} .

4. On se propose maintenant de démontrer que le sous-espace image de A_n est le sous-ensemble F_n de E_n formé des fonctions g telles que $g(0) = 0$ et que, en outre, $\frac{1}{x}(g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0))$ admette une limite finie lorsque x tend vers 0.

a) Traiter le cas où $n = 0$.

b) Supposant maintenant $n > 0$, vérifier que $\text{Im } A_n$ est inclus dans F_n .

c) Prenant g dans F_n et posant $f = B_n g$, montrer que f est de classe C^n sur $[-1, 1]$ privé de 0, puis étudier le comportement de $\frac{1}{x}(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0))$ lorsque x tend vers 0.

d) Conclure.

Deuxième partie

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, de classe C^∞ , définies sur $[-1, 1]$. Pour toute $f \in E$ on pose

$$\delta(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\pi_n(f)}{1 + \pi_n(f)}.$$

5. Démontrer les assertions suivantes :

a) Pour $f_1, f_2, f_3 \in E$, on a

$$\delta(f_1 - f_2) \leq \delta(f_1 - f_3) + \delta(f_2 - f_3).$$

b) Étant donnés des éléments f et $f_i (i \in \mathbf{N})$ de E , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\delta(f_i - f)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$
- (ii) pour tout $n \geq 0$, $f_i^{(n)}$ converge uniformément vers $f^{(n)}$.

c) La fonction δ définie ci-dessus est-elle la seule pour laquelle les assertions **5.a)** et **5.b)** sont vraies ?

On désigne respectivement par A et B les endomorphismes de E définis par

$$(Af)(x) = x f(x) \quad , \quad (Bg)(x) = \int_0^1 g'(xt) dt \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

6.a) Déterminer les produits AB et BA .

b) Déterminer les noyaux et les images de A et B .

7.a) Déterminer des fonctions φ_n , $n = 1, 2, \dots$ sur $[0, 1]$ telles que l'on ait, pour toute $g \in E$,

$$(B^n g)(x) = \int_0^1 \varphi_n(t) g^{(n)}(xt) dt .$$

[On pourra procéder par récurrence sur n .]

b) Calculer $(B^n g)(0)$.

c) On fixe g dans E . Déterminer des polynômes P_n , $n = 0, 1, \dots$ tels que l'on ait

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall n \geq 1 \quad , \quad (A^n B^n g)(x) = g(x) - P_{n-1}(x) .$$

[On pourra procéder par récurrence sur n et écrire $A^{n+1} B^{n+1} = A^n A B B^n$.]

d) Dédire de ce qui précède une démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral.

8. Déterminer l'image de A^n et le noyau de B^n .

Troisième partie

On désigne par E' l'espace vectoriel des formes linéaires φ sur E possédant la propriété suivante : si des éléments f et f_i ($i \in \mathbf{N}$) de E sont tels que $\delta(f_i - f)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$, alors $\varphi(f_i)$ tend vers $\varphi(f)$.

9. Vérifier que, si φ appartient à E' , il en est de même des formes linéaires $\varphi \circ A$ et $\varphi \circ B$.

On note A' et B' respectivement les endomorphismes de E' ainsi définis. Pour tout $i \in \mathbf{N}$ et tout $\alpha \in [-1, 1]$, on note $\varphi_{\alpha; i}$ la forme linéaire sur $E : f \mapsto f^{(i)}(\alpha)$.

10. Pour n entier positif, déterminer $\text{Im } (A')^n$ et $\text{Ker } (B')^n$; montrer que les $\varphi_{0; i}$, $i = 0, \dots, n-1$, forment une base de $\text{Ker } (A')^n$.

11. Déterminer les éléments ψ de E' solutions de l'équation $(A')^n \psi = \varphi_{0; 0}$.

Étant donné un nombre complexe α , on désigne par T_α l'endomorphisme de E défini par

$$(T_\alpha f)(x) = (x - \alpha) f(x) \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1] .$$

On pourra admettre les résultats suivants :

- (i) si φ appartient à E' , il en est de même de $\varphi \circ T_\alpha$. On notera T'_α l'endomorphisme de E' ainsi défini.
- (ii) si $\alpha \in [-1, 1]$, $(T'_\alpha)^n$ est surjectif et $\text{Ker } (T'_\alpha)^n$ admet pour base les $\varphi_{\alpha; i}$, $i = 0, \dots, n-1$.

12. Dans cette question on désigne par G un espace vectoriel et par $U_1, \dots, U_r$ des endomorphismes de G , commutant deux à deux et tels que, pour $i \neq j$, on ait

$$\text{Ker } U_i = U_j(\text{Ker } U_i) .$$

Montrer que l'on a

$$\text{Ker } (U_1 \dots U_r) = \text{Ker } U_1 + \dots + \text{Ker } U_r .$$

13. Soit Q un polynôme à une indéterminée, à coefficients complexes ; notons T_Q l'endomorphisme de E défini par $(T_Q f)(x) = Q(x) f(x)$.

a) Vérifier que, si φ appartient à E' , il en est de même de $\varphi \circ T_Q$. On note T'_Q l'endomorphisme de E' ainsi défini.

b) Préciser l'image de T'_Q et donner une base de son noyau.

* *

*