

CONCOURS D'ADMISSION 2008

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Dénombrement d'applications entre ensembles finis

On se propose de démontrer quelques propriétés du nombre des applications surjectives d'un ensemble fini sur un autre.

Étant donné deux nombres entiers strictement positifs k et n , on note

- $p_{k,n}$ le nombre de parties à k éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, nul si $k > n$; on rappelle que $p_{k,n} = \binom{n}{k}$ pour $k \leq n$;
- $j_{k,n}$ le nombre d'applications injectives de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, nul si $k > n$;
- $s_{k,n}$ le nombre d'applications surjectives de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, nul si $k < n$.

On posera aussi $p_{0,n} = j_{0,n} = 1$.

Première partie

1. Préciser les valeurs de $j_{n,n}$ et $s_{n,n}$.

2. Montrer que l'on a $j_{k,n} = \binom{n}{k} k!$ si $k \leq n$.

Pour tout entier $r > 0$, on note $P(r)$ (resp. $S(r)$) la matrice à r lignes et r colonnes de coefficients $P(r)_{k,n} = p_{k,n}$ (resp. $S(r)_{k,n} = s_{k,n}$) pour $k, n = 1, \dots, r$.

3.a) Montrer que l'on a, pour k et $n > 0$:

$$n^k = \sum_{q=1, \dots, n} s_{k,q} p_{q,n}.$$

3.b) Calculer le déterminant de la matrice $A(r)$ de coefficients $A(r)_{k,n} = n^k$, $k, n = 1, \dots, r$.

Deuxième partie

Pour tout entier $d > 0$, on désigne par E_d l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée, à coefficients complexes, de degré $\leq d$. On le munit de la base $(X^0 = 1, X, \dots, X^d)$; on définit un endomorphisme T de E_d par

$$T(P)(X) = P(X + 1) \quad \text{pour tout } P \in E_d.$$

4.a) Déterminer les coefficients $T_{k,n}$ de la matrice représentant T dans la base indiquée (ici $0 \leq k, n \leq d$).

4.b) Même question pour T^{-1} dont on démontrera l'existence.

4.c) Étant donné deux vecteurs lignes $(a_0, \dots, a_d)$ et $(b_0, \dots, b_d)$ satisfaisant $a_0 = b_0$ et, pour $n = 1, \dots, d$,

$$a_n = \sum_{q=0, \dots, n} b_q \binom{n}{q},$$

écrire les b_q en fonction des a_n .

4.d) Établir une formule de la forme

$$s_{k,n} = \sum_{q=1, \dots, n} \lambda_{n,q} q^k \binom{n}{q},$$

où $0 < n \leq k$ et où les $\lambda_{n,q}$ sont des coefficients à déterminer.

Dans la suite de cette seconde partie, on définit des éléments N_k de E_d , $k = 0, 1, \dots, d$, par

$$N_k(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{k!} X(X+1) \cdots (X+k-1) & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

5. Vérifier que les N_k forment une base de E_d .

6. Démontrer la formule

$$T(N_k) = N_k + T(N_{k-1}) \quad \text{pour } k > 0.$$

7.a) Déterminer les coefficients $\widetilde{T}_{k,q}$ ($k, q = 0, \dots, d$) de la matrice représentant l'endomorphisme T dans la base ci-dessus.

7.b) Même question pour les coefficients de T^{-1} .

8. Écrire les formules donnant les polynômes X^k , $k = 0, \dots, d$, en fonction des polynômes N_k .

[On pourra utiliser la formule de la question **3.a**.]

Troisième partie

Étant donné deux entiers k et $n > 0$, on désigne par

- $A_{k,n}$ l'ensemble des applications de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$;
- $B_{k,n}$ l'ensemble des applications surjectives de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, ensemble bien entendu vide si $k < n$;
- $C_{k,n}$ l'ensemble des applications $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{N}$ satisfaisant

$$f(1) + \dots + f(n) = k ;$$

- $D_{k,n}$ le sous-ensemble du précédent formé des f telles que $f(i) \geq 1$ pour tout i (ici, $n \leq k$).

9. Démontrer la « formule du multinôme », pour $n > 0$, $k \geq 0$:

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{f \in C_{k,n}} \frac{k!}{f(1)! \dots f(n)!} x_1^{f(1)} \dots x_n^{f(n)} ,$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont des nombres réels.

[On pourra procéder par récurrence sur n .]

10. Montrer que

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{\varphi \in A_{k,n}} x_{\varphi(1)} \dots x_{\varphi(k)} .$$

11. Montrer que, pour $0 < n \leq k$, on a

$$s_{k,n} = \sum_{f \in D_{k,n}} \frac{k!}{f(1)! \dots f(n)!} .$$

Quatrième partie

On considère une série entière à coefficients réels $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$; on suppose $a_0 = 0$; on note R_1 son rayon de convergence supposé non nul, et $\varphi(x)$ sa somme. Pour n et k entiers ≥ 0 , on pose

$$\alpha_{n,k} = \begin{cases} \sum_{f \in D_{k,n}} a_{f(1)} \dots a_{f(n)} & \text{si } 0 < n \leq k \\ 0 & \text{si } 0 \leq k < n \end{cases}$$

$$\alpha_{0,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

12. Indiquer un minorant $\rho > 0$ du rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} \alpha_{n,k} x^k$ où $n \geq 0$; déterminer la somme de cette série dans l'intervalle $|x| < \rho$.

On considère une seconde série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$; on note R_2 son rayon de convergence supposé non nul, et $\psi(x)$ sa somme.

13. Montrer que la série entière $\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n \geq 0} b_n \alpha_{n,k} \right) x^k$ a un rayon de convergence non nul, et préciser sa somme au voisinage de 0.

14. On considère la fonction $\theta(x) = e^{(e^x - 1)}$. Exprimer les coefficients de la série de Taylor de θ à l'aide des nombres $s_{k,n}$.

* *

* *