

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Sur quelques questions de calcul différentiel

Notations et conventions

Pour tout entier $n > 0$, on note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel et $\| . \|$ la norme associée sur $\mathbf{R}^n$, S^{n-1} la sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices réelles à n lignes et n colonnes, I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles, et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ celui des matrices de déterminant 1. On note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tM sa transposée, $\widetilde{M}$ la matrice de ses cofacteurs, et l'on rappelle la formule

$$M {}^t\widetilde{M} = \det(M) I_n .$$

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on désigne par $\exp M$ son exponentielle, définie par $\exp M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$. On rappelle que l'application $t \mapsto \exp(tM)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée en 0 est M . De même, si φ est un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, on note $\exp(\varphi)$ son exponentielle donnée par la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k}{k!}$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, on note df_x sa différentielle au point x , soit :

$$\forall h \in \mathbf{R}^n, \quad df_x(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + th) - f(x)) .$$

Préliminaires

1a. Soient α et β deux formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\ker \beta \subset \ker \alpha$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\alpha = \lambda\beta$.

1b. Soient $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_r$ des formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\bigcap_{i=1}^r \ker \beta_i \subset \ker \alpha$. Montrer que α est combinaison linéaire de $\beta_1, \dots, \beta_r$. (Une méthode possible est de raisonner par récurrence sur r , en considérant, pour $r \geq 2$, la restriction de α et β_r à $F = \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker \beta_i$).

Première partie

2. Soit $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \|\gamma(t)\| = 1.$$

Montrer que pour tout t dans $] - 1, 1[$, $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et soit $v \in \mathbf{R}^n$, non nul, orthogonal à x . Montrer qu'il existe une application $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in]-1, 1[, \|\gamma(t)\| = 1, \gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

4. Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit g sa restriction à S^{n-1} . Montrer que g admet des extremums. Si x est un extremum, en considérant une application γ comme ci-dessus, montrer qu'il existe un réel λ tel que

$$df_x(h) = \lambda \langle x, h \rangle, \quad (\forall h \in \mathbf{R}^n).$$

5. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On définit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle x, Ax \rangle \end{cases}.$$

5a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

5b. Soit x un extremum de la restriction de f à S^{n-1} . Montrer que x est vecteur propre de A .

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère les fonctions suivantes :

$$q : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R} \\ M \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}^2 \end{cases}$$

où m_{ij} est le coefficient de M sur la i -ème ligne et j -ième colonne,

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R} \\ M \mapsto \det(M) - 1 \end{cases}$$

ainsi que la restriction de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, que l'on note g .

6a. Montrer que $q(M) = \mathrm{Tr}({}^t M M)$.

6b. Vérifier que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^t A B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6c. Montrer que q est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

7. On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant pour coefficient 1 à la i -ième ligne et j -ième colonne, et 0 partout ailleurs. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\det(M + tE_{ij})$ en fonction de $\det(M)$, de t et des coefficients de la matrice $\widetilde{M}$.

En déduire que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $df_M(H) = \text{Tr}({}^t\widetilde{M}H)$.

8. Montrer que $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que la restriction g de q à $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\det(\exp M) = e^{\text{Tr}(M)}$.

10. Soit $M \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$ et soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$. Montrer que l'application

$$\gamma : \begin{cases}]-1, 1[\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t \mapsto M \exp(tM^{-1}H) \end{cases}$$

est à valeurs dans $\text{SL}_n(\mathbf{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\gamma(0) = M$, $\gamma'(0) = H$.

11. Soit $M \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$ un point où la fonction g atteint son minimum, et soit H dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$.

11a. Montrer que $dq_M(H) = 0$.

11b. Déduire de ce qui précède que M est une matrice orthogonale. Que vaut alors $g(M)$?

Troisième partie

Dans cette partie, on se propose de calculer la différentielle en un point quelconque de l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On rappelle que $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12a. Soient $C_1, C_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $B(t) = C_1(t)C_2(t)$. Montrer que B est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout t dans $\mathbf{R}$,

$$B'(t) = C_1'(t)C_2(t) + C_1(t)C_2'(t).$$

12b. Soit $C : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $C(t)$ est inversible et on pose $D(t) = C(t)^{-1}$. Montrer que D est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout t dans $\mathbf{R}$,

$$D'(t) = -C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}.$$

13. Soient $C_1, C_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $C_1(0) = C_2(0) = I_n$.

13a. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Trouver une application $A : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $A(0) = I_n$ et $A'(0) = \alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)$.

13b. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $C_1(t)$ et $C_2(t)$ soient inversibles pour tout t dans l'intervalle $] -\epsilon, \epsilon[$.

13c. Pour tous s, t dans $] -\epsilon, \epsilon[$, posons $L(s, t) = C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}$. Calculer $\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0, 0)$ en fonction de $C_1'(0)$ et $C_2'(0)$.

14. Soit $\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ défini, pour tout X dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ par

$$\Phi(X) : Y \mapsto XYX^{-1}.$$

14a. Montrer que Φ est un morphisme de groupes. Montrer que les coefficients de XYX^{-1} sont des fractions rationnelles des coefficients de X et de Y . En déduire que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

14b. Montrer que $d\Phi_{I_n} : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow L(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ est donné, pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$d\Phi_{I_n}(X)(Y) = XY - YX.$$

Dans la suite du problème, on pose $\varphi(X) = d\Phi_{I_n}(X) : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ Y \mapsto XY - YX \end{cases}$.

15. Soit V un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit $f : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes de classe $\mathcal{C}^1$.

15a. Montrer que pour tout $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$df_X(H) = f(X) df_{I_n}(X^{-1}H) = df_{I_n}(HX^{-1}) f(X).$$

15b. On fixe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère les applications $a, b : \mathbf{R} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ définies pour tout $t \in \mathbf{R}$ par

$$a(t) = f(\exp tX), \quad b(t) = \exp(t df_{I_n}(X)).$$

Montrer que $a = b$.

15c. Retrouver le résultat de la question 9 en utilisant le résultat de la question 7.

15d. Montrer qu'avec les notations de la question 14, $\Phi(\exp X) = \exp(\varphi(X))$, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

16. On fixe $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour tout $s, t \in \mathbf{R}$, on pose

$$u(s, t) = \exp(s(X + tY)), \quad A(s, t) = \exp(-sX) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t).$$

16a. Montrer que $A(1, 0) = \exp(-X) d\exp_X(Y)$.

16b. Déduire du calcul de $\frac{\partial A}{\partial s}(s, t)$ que $\frac{\partial A}{\partial s}(s, 0) = \exp(-s\varphi(X))(Y)$.

16c. Montrer que $A(s, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{n+1} \frac{\varphi(X)^n}{(n+1)!}(Y)$.

16d. En déduire une formule (sous forme de série) pour $d\exp_X(Y)$.

* *
*