

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Valeurs singulières d'une matrice et inégalités de traces

Notations et conventions

Dans ce problème l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien usuel noté $(\cdot|\cdot)$; on rappelle qu'il est linéaire à droite, semi-linéaire à gauche et que la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{C}^n$ est orthonormale. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients complexes qu'on identifie à l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbf{C}^n$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Le coefficient de la i -ième ligne et j -ième colonne d'une matrice A est noté A_{ij} . On note A^* , appelée adjointe de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice définie pour tous $1 \leq i, j \leq n$ par $A_{ij}^* = \overline{A_{ji}}$.

On définit les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid A^* = A\} \\ \mathcal{H}_n^+ &= \{A \in \mathcal{H}_n \mid (\forall x \in \mathbf{C}^n), (x|Ax) \geq 0\} \\ \mathcal{U}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid (\forall x, y \in \mathbf{C}^n), (Ax|Ay) = (x|y)\} \\ \mathcal{N}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid AA^* = A^*A\} \\ \mathcal{D}_n &\text{ désigne l'ensemble des matrices diagonales dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{C})\end{aligned}$$

Enfin, pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbf{C}^n$, $F^\perp$ désigne le sous-espace orthogonal pour le produit hermitien usuel.

Ce problème a pour but l'étude de quelques inégalités de traces sur les matrices carrées à coefficients complexes via l'introduction de la décomposition en valeurs singulières et le calcul de la distance minimale pour la norme de Frobenius entre deux matrices de $\mathcal{H}_n$ définies à équivalence près par des changements de bases dans $\mathcal{U}_n$.

Première partie : étude de $\mathcal{N}_n$

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$:

$$(A^*x|y) = (x|Ay).$$

2a. Montrer que $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si $A^*A = AA^* = I_n$.

2b. Montrer que $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbf{C}^n$.

3a. Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, $A((\ker A)^\perp) \subset (\ker A)^\perp$. En déduire que si λ est une valeur propre de A et si E_λ est le sous-espace propre associé, alors $A(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp$.

3b. En déduire que $\mathcal{N}_n = \{UDU^*, U \in \mathcal{U}_n, D \in \mathcal{D}_n\}$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique (non nécessairement distinctes) de A . Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, alors $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n |A_{i,j}|^2$. (On pourra calculer la trace de AA^* .)

5a. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, alors A et A^* ont même noyau.

5b. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{N}_n$.

(ii) Tout vecteur propre de A est vecteur propre de son adjointe A^* .

Pour (ii) $\Rightarrow$ (i), on pourra procéder par récurrence sur la dimension n et pour un vecteur propre x de A considérer l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par x .

6a. Prouver que si la matrice $A \in \mathcal{N}_n$, son adjointe A^* peut s'exprimer comme un polynôme en A à coefficients complexes. (On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.)

6b. Prouver que si A et B sont dans $\mathcal{N}_n$ et commutent alors $AB \in \mathcal{N}_n$.

7. Prouver que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{N}_n$

(ii) Il existe une matrice $U \in \mathcal{U}_n$ commutant avec A telle que $A^* = AU$.

On pourra construire U à partir des valeurs propres de A et raisonner dans une base orthonormale bien choisie.

Deuxième partie : valeurs singulières d'une matrice

8. Montrer que $A \in \mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{H}_n^+$) si et seulement si A est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont réelles (resp. réelles positives).

9. Montrer que si $A \in \mathcal{H}_n^+$ il existe une unique matrice $S \in \mathcal{H}_n^+$ telle que $S^2 = A$. (Pour l'unicité, on pourra se ramener au cas où A est un multiple de l'identité en considérant les sous-espaces propres de A .)

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ on dit que $A = US$ est une décomposition polaire de A si $S \in \mathcal{H}_n^+$ et $U \in \mathcal{U}_n$. Dans la suite du problème, on admettra l'existence d'une décomposition polaire pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ on dit que $A = UDW$ est une décomposition en valeurs singulières de A si $U, W \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$ est à coefficients réels positifs ou nuls.

10. Prouver que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ admet une décomposition en valeurs singulières. (On pourra commencer par écrire une décomposition polaire de A .)

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe une décomposition en valeurs singulières de A pour laquelle les coefficients diagonaux $\alpha_i = D_{ii}$ de D vérifient $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ et que ces coefficients sont alors déterminés de façon unique. On les appellera les valeurs singulières de A .

Troisième partie : inégalités de traces

12. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice vérifiant

$$(\mathcal{P}_k) \quad P^2 = P = P^*, \quad \text{rang}(P) = k.$$

12a. Montrer que les coefficients de P vérifient :

(i) $0 \leq P_{ii} \leq 1$ pour tout entier i entre 1 et n ,

(ii) $\sum_{i=1}^n P_{ii} = k$.

12b. Soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ des réels et D la matrice diagonale telle que $D_{ii} = \lambda_i$ pour tout entier i entre 1 et n . Montrer que $\text{Tr}(PD) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Trouver une matrice P vérifiant les conditions $(\mathcal{P}_k)$ telle que $\text{Tr}(PD) = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

12c. Montrer que si P_1, P_2 sont deux matrices vérifiant les conditions $(\mathcal{P}_k)$, il existe $U \in \mathcal{U}_n$ telle que $P_2 = UP_1U^*$. En déduire que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \max_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Tr}(UPU^*D)$ où P est une matrice vérifiant $(\mathcal{P}_k)$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est *doublement stochastique* si A est à coefficients réels positifs et vérifie $\sum_{i=1}^n A_{ik} = 1$ et $\sum_{j=1}^n A_{kj} = 1$, pour tout entier k compris entre 1 et n . On note $\mathcal{DS}_n$ l'ensemble des matrices doublement stochastiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

13. Montrer que si $U \in \mathcal{U}_n$, la matrice dont les coefficients sont les $|U_{i,j}|^2$ est doublement stochastique.

14. Soit A une matrice doublement stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et soient

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$$

des réels. On suppose que A n'est pas la matrice identité I_n et on note k le plus petit entier tel que $A_{kk} \neq 1$.

14a. Montrer qu'il existe deux entiers m et ℓ vérifiant $k < m \leq n$, $k < \ell \leq n$ et tels que $A_{mk} \neq 0$, $A_{k\ell} \neq 0$, $A_{m\ell} \neq 1$.

14b. Construire une matrice doublement stochastique A' de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant :

- (i) $A'_{ij} = A_{ij}$ si $(i, j) \notin \{(k, k), (m, k), (k, \ell), (m, \ell)\}$,
- (ii) A'_{mk} ou $A'_{k\ell}$ est nul,
- (iii) $\sum_{i,j=1}^n A'_{i,j} \alpha_i \beta_j \geq \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} \alpha_i \beta_j$.

En déduire que $\max_{A \in \mathcal{DS}_n} \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} \alpha_i \beta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$.

15. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

15a. Soit D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\alpha_i = D_{ii}$ sont les valeurs singulières de A et soit T la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\beta_i = T_{ii}$ sont les valeurs singulières de B telles que

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n.$$

Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{U}_n$ telles que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(UDVT)$.

15b. Montrer que $\text{Tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^n U_{ij} V_{ji} \alpha_j \beta_i$ et en déduire que

$$|\text{Tr}(AB)| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

15c. Soient A et B dans $\mathcal{H}_n^+$. Montrer que $|\text{Tr}(AB)| \leq \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$.

16. Soient A et B dans $\mathcal{H}_n$ et soient

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n.$$

leurs valeurs propres.

Montrer que

$$\min_{U \in \mathcal{U}_n} \|A - U^* B U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2},$$

où la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est donnée par $\|A\|^2 = \text{Tr}(A^* A)$. On pourra commencer par déterminer $\max_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Tr}(AU^* B U)$.

* *
*