

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Dans tout le problème, le corps de base k est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soit V un espace vectoriel sur le corps k . Par l'abus de notation habituel, on peut noter 0 le vecteur nul de V . On note $\mathcal{L}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V , c'est-à-dire des applications k -linéaires de V dans lui-même. On se permet de noter multiplicativement la composition des endomorphismes. Ainsi, si u est un endomorphisme de V , u^0 désigne l'application identique I_V de V et, pour tout entier strictement positif r , u^r est la composée de r endomorphismes égaux à u . On note $\text{tr}(u)$ la trace de l'endomorphisme u , $\det(u)$ son déterminant. On dit que u est *nilpotent* s'il existe un entier strictement positif r tel que u^r soit nul.

Soit n un entier strictement positif. On désigne par $\mathcal{M}_n(k)$ l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients dans k . On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(k)$, qui en est l'élément neutre pour la multiplication. Pour A dans $\mathcal{M}_n(k)$, il sera commode de noter φ_A l'endomorphisme de l'espace vectoriel k^n dont la matrice dans la base canonique est A . Le noyau de A est le noyau de φ_A . Le polynôme caractéristique de A est le déterminant de la matrice $XI_n - A$, où X est une indéterminée ; c'est un polynôme en X à coefficients dans k , unitaire de degré n . On note $\text{tr}(A)$ la trace de la matrice A et $\det(A)$ son déterminant. On dit que A est *nilpotente* si φ_A l'est, c'est-à-dire s'il existe un entier r strictement positif tel que A^r soit la matrice nulle. Si V est un espace vectoriel sur k de dimension n et u un endomorphisme de V , le polynôme caractéristique de u est celui de la matrice de u dans n'importe quelle base ; il ne dépend pas du choix de cette base.

La première et la deuxième partie du problème sont indépendantes.

Question préliminaire

Soit V un espace vectoriel sur k de dimension finie n strictement positive. Soit u un endomorphisme nilpotent de V . Prouver que le polynôme minimal de u est de la forme X^r , où r est un entier satisfaisant à $1 \leq r \leq n$, et que αu est nilpotent pour tout scalaire α .

Première partie

Dans cette partie, le corps de base k est $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ formé des matrices de trace nulle. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}$. C'est un cône dans $\mathcal{M}$, appelé le *cône nilpotent*.

1. Soit V un espace vectoriel réel de dimension 2 et soit u un endomorphisme de V nilpotent et non nul. Prouver qu'il existe une base (e_1, e_2) de V telle que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$.
2. Soit A une matrice nilpotente non nulle dans $\mathcal{M}$. Prouver que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Établir que les éléments de $\mathcal{N}$ sont les matrices de $\mathcal{M}$ dont la trace et le déterminant sont nuls.
4. Quel est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par $\mathcal{N}$?
5. Soit Φ un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{N}$ contienne $\Phi(\mathcal{N})$. Démontrer que $\Phi(\mathcal{S})$ est égal à $\mathcal{S}$.
6. Soit ι l'application linéaire

$$\iota : (a, b, c) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Prouver que ι est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{S}$. Démontrer que le cône nilpotent $\mathcal{N}$ est l'image par ι du cône $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ qui a pour équation $a^2 + bc = 0$.

7. Prouver que tout point non nul de $\mathcal{C}$ est un point régulier de la surface $\mathcal{C}$ et que le plan tangent à $\mathcal{C}$ en un tel point P est formé des points Q de $\mathbb{R}^3$ tels que $\text{tr}(\iota(P)\iota(Q)) = 0$.
8. Soit Q un point de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice $\iota(Q)$ soit diagonalisable non nulle. Prouver qu'il existe deux plans tangents à $\mathcal{C} - \{0\}$ passant par Q . On les note Π_1 et Π_2 . Prouver que l'intersection de $\mathcal{N}$ et de l'image de ces plans par ι , c'est-à-dire $\mathcal{N} \cap \iota(\Pi_1 \cup \Pi_2)$, est l'ensemble des matrices nilpotentes dont le noyau contient une des deux droites propres de $\iota(Q)$.
[On pourra traiter d'abord le cas où $\iota(Q)$ est diagonale.]

9. Prouver que le complémentaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$ est la réunion de trois parties connexes par arcs, que ce sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^3$ et que l'une d'elles est formée des points Q de $\mathbb{R}^3$ tels que $\iota(Q)$ soit une matrice diagonalisable non nulle.

Deuxième partie

Dorénavant, le corps de base k est $\mathbb{C}$. On fixe un entier strictement positif n et un espace vectoriel complexe V de dimension n .

A Réduction d'un endomorphisme nilpotent

On fixe un endomorphisme nilpotent u de V . On note r le degré de son polynôme minimal, où $1 \leq r \leq n$, de sorte que V contient un vecteur x tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$.

A.1. Démontrer que les endomorphismes nilpotents de V sont les endomorphismes dont le polynôme caractéristique est X^n .

A.2. Soit x un vecteur de V tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$. Pour i un entier tel que $1 \leq i \leq r$, on pose $e_i = u^{i-1}(x)$. Prouver que les vecteurs $e_1, \dots, e_r$ de V sont linéairement indépendants et que le sous-espace vectoriel W qu'ils engendrent est stable par u . En notant u_W l'endomorphisme de W induit par u , écrire la matrice de u_W dans la base $(e_1, \dots, e_r)$.

A.3. On conserve les notations de la question précédente. Soit ℓ une forme linéaire sur V qui ne s'annule pas en e_r . Pour i un entier tel que $1 \leq i \leq r$, on pose $\varepsilon_i = \ell \circ u^{i-1}$. Prouver que les formes linéaires $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ sont linéairement indépendantes. Notant W' l'intersection des noyaux de ces formes, démontrer que W' est un supplémentaire de W dans V et que W' est stable par u . Que peut-on dire du polynôme minimal de l'endomorphisme $u_{W'}$ de W' induit par u ?

Pour chaque entier strictement positif i , notons J_i la matrice suivante de $\mathcal{M}_i(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

autrement dit, c'est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^i$ de l'endomorphisme qui envoie chaque vecteur de cette base sur le suivant, sauf le dernier dont l'image est nulle.

A.4. Par récurrence sur l'entier strictement positif n , prouver qu'il existe un entier strictement positif α , une suite finie d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha)$ satisfaisant à $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\alpha > 0$, et une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V tels que la matrice de u dans cette base soit la matrice J_λ diagonale par blocs dont les blocs successifs sont $J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_\alpha}$.

A.5. Avec les notations de la question précédente, prouver que pour tout entier strictement positif i , l'entier $\dim \ker u^i - \dim \ker u^{i-1}$ est le cardinal de l'ensemble des entiers j tels que $1 \leq j \leq \alpha$ et $\lambda_j \geq i$. En déduire que dans la question précédente, les entiers $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ sont déterminés par u .

A.6. On garde les notations de la question A.4. On note $\mathcal{C}(u)$ le commutant de u dans $\mathcal{L}(V)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes v de V tels que $uv = vu$. Prouver que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ de dimension $\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i(2i-1)$.

[On pourra exprimer les conditions sur $v(e_1), \dots, v(e_n)$ pour que l'on ait $uv = vu$.]

B Outils topologiques

Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, toute norme sur E munit E d'une topologie : elle ne dépend pas du choix de cette norme, on l'appelle topologie naturelle de E . En particulier, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et l'espace $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$, formé des polynômes de degré au plus n , de leur topologie naturelle.

On rappelle que si p est la dimension de E , si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E et si $x_1, \dots, x_p$ sont les applications coordonnées dans cette base, une application ϕ d'un espace topologique T dans E est continue si et seulement si $x_i \circ \phi$ est continue pour tout entier i compris entre 1 et p . Une application linéaire d'un espace vectoriel complexe de dimension finie dans un autre est continue (pour les topologies naturelles).

B.1. Prouver que l'ensemble des applications continues de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est stable par addition et multiplication : si f et g sont deux telles applications, les applications $f + g$ et fg , qui à une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associent respectivement $f(A) + g(A)$ et $f(A)g(A)$, sont continues.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que les applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui à une matrice A associent respectivement AB et BA , sont continues.

B.2. Prouver que l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$ qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est une application continue. En particulier, l'application déterminant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est continue.

B.3. Établir que l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

B.4. Soient a, b, r des entiers strictement positifs et soit $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes qui ont a lignes et b colonnes. Cet espace est muni de la topologie naturelle. Prouver que la partie de $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{C})$ formée des matrices de rang supérieur ou égal à r est ouverte.

B.5. Soit $(A_i)_{i \geq 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui tend vers une matrice A lorsque i tend vers l'infini. Prouver que pour tout entier i assez grand, on a : $\dim \ker(A) \geq \dim \ker(A_i)$.

C Deux endomorphismes qui commutent

C.1. Soit v un endomorphisme de V . Pour tout vecteur x de V , on note I_x l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(v)(x) = 0$. Prouver que I_x est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ non réduit à $\{0\}$, et que son unique générateur unitaire μ_x divise le polynôme minimal de v . Pour un vecteur x de V , prouver l'équivalence des conditions suivantes :

- (i) le polynôme μ_x est de degré n ;
- (ii) les vecteurs $x, v(x), \dots, v^{n-1}(x)$ sont linéairement indépendants.

Si v est nilpotent, démontrer que ces conditions sont vérifiées si et seulement si il existe une base de V dans laquelle la matrice de v est la matrice J_n décrite avant la question A.4..

On dit que v est *régulier* s'il existe un vecteur x de V vérifiant ces conditions.

C.2. Soit v un endomorphisme régulier de V . Prouver que les endomorphismes qui commutent à v sont les polynômes en v .

C.3. Soit v un endomorphisme de V et soit w un endomorphisme régulier de V . On fixe un vecteur x de V tel que $(x, w(x), \dots, w^{n-1}(x))$ soit une base de V , que l'on notera $\mathcal{B}$. Prouver que $v + \varepsilon w$ est régulier pour tous les nombres complexes ε sauf peut-être un nombre fini d'entre eux.

C.4. Soit v un endomorphisme de V . On suppose que dans une base $\mathcal{B}$ de V , l'endomorphisme v a pour matrice la matrice J_λ de la question A.4. Soient $c_1, \dots, c_\alpha$ des nombres complexes *distincts* deux à deux, et soit w l'endomorphisme de V ayant pour matrice dans la base $\mathcal{B}$ la matrice diagonale par blocs dont les blocs successifs sont $c_1 I_{\lambda_1}, \dots, c_\alpha I_{\lambda_\alpha}$. Prouver que $v + w$ est régulier.

C.5. Soit u un endomorphisme *nilpotent* de V . Prouver qu'il existe un endomorphisme régulier w qui commute à u .

C.6. Soit u un endomorphisme nilpotent de V et soit v un endomorphisme de V qui commute à u . On note A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ engendré par les endomorphismes $u^i v^j$ lorsque i et j parcourent les entiers naturels. Prouver que A est de dimension au plus n .

[On pourra traiter d'abord le cas où v est régulier et utiliser B.4. pour le cas général.]

C.7. Soient u et v deux endomorphismes nilpotents de V qui commutent entre eux. On note B le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ engendré par les endomorphismes $u^i v^j$ quand (i, j) parcourt les couples d'entiers naturels *non tous deux nuls*. Prouver que B est de dimension au plus $n - 1$.

C.8. Pour $n = 4$, donner un exemple d'endomorphismes u et v comme dans la question C.7., tels que B soit de dimension 3 mais ne contienne aucun endomorphisme régulier.

[On pourra chercher des endomorphismes dont la matrice dans une base donnée de V est triangulaire supérieure, à coefficients 0 ou 1.]

D Partitions

Une *partition* est une suite décroissante $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ d'entiers, nuls à partir d'un certain rang. Si $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ est une partition, on note $|\lambda|$ la somme des entiers λ_i et on dit que λ est une partition de l'entier $|\lambda|$; enfin, on dit que λ_i est la part d'indice i de λ . Le *diagramme* de λ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées (i, j) sont entières et satisfont à $i \geq 1$ et $1 \leq j \leq \lambda_i$.

D.1. Soit λ une partition. Pour i entier strictement positif, on note μ_i le nombre d'entiers strictement positifs j tels que $i \leq \lambda_j$. Prouver que $\mu = (\mu_i)_{i \geq 1}$ est une partition et que l'on a $|\lambda| = |\mu|$.

On dit que μ est la partition conjuguée de λ et on la note λ' .

D.2. Quelle est la transformation géométrique qui permet de passer du diagramme d'une partition λ à celui de λ' ? (Justifier.) Prouver que $(\lambda')' = \lambda$ pour toute partition λ .

Si $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ et $\mu = (\mu_i)_{i \geq 1}$ sont deux partitions, on écrit $\mu \leq \lambda$ si l'on a $|\mu| = |\lambda|$ et si, pour tout entier i strictement positif, $\mu_1 + \dots + \mu_i \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_i$.

D.3. Prouver que la relation $\leq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des partitions. Établir que la restriction de la relation $\leq$ à l'ensemble des partitions de l'entier 6 n'est pas une relation d'ordre total.

D.4. Soient $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ et $\mu = (\mu_i)_{i \geq 1}$ deux partitions; on suppose que $\mu \leq \lambda$ et que $\mu \neq \lambda$. Prouver qu'il existe une partition ν satisfaisant à $\mu \leq \nu \leq \lambda$, $\mu \neq \nu$, et telle que $\nu_i = \mu_i$ pour tous les entiers strictement positifs i sauf deux d'entre eux, i_0 et i_1 , pour lesquels on a : $\nu_{i_0} = \mu_{i_0} + 1$ et $\nu_{i_1} = \mu_{i_1} - 1$.

D.5. Soient λ et μ deux partitions. Prouver que les conditions $\mu \leq \lambda$ et $\lambda' \leq \mu'$ sont équivalentes.

E Topologie des classes de similitude

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

À chaque partition λ de n dont les parts non nulles sont $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\alpha > 0$, on associe la matrice J_λ décrite dans la question A.4. et on note $\mathcal{N}_\lambda$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables à J_λ .

E.1. Prouver que, quand λ parcourt l'ensemble des partitions de n , les parties $\mathcal{N}_\lambda$ sont deux à deux disjointes et que $\mathcal{N}$ est l'union des $\mathcal{N}_\lambda$. Prouver que si λ est une partition de n , l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une réunion de parties de la forme $\mathcal{N}_\mu$.

E.2. Soit λ une partition de n . Calculer $DJ_\lambda D^{-1}$ lorsque D est une matrice diagonale inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que la matrice nulle est dans l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$. Soit $\mathcal{N}^{\text{reg}}$ l'ensemble des matrices semblables à J_n , correspondant à la partition qui a une seule part non nulle, $(n, 0, \dots)$. Prouver que l'adhérence de $\mathcal{N}^{\text{reg}}$ est $\mathcal{N}$ et que $\mathcal{N}^{\text{reg}}$ est une partie ouverte de $\mathcal{N}$.

E.3. Soient λ et μ deux partitions de n . On suppose que l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ contient $\mathcal{N}_\mu$. Prouver que l'on a : $\mu \leq \lambda$.

[On pourra utiliser en particulier les questions A.5. et B.5.]

E.4. Supposons n pair, $n = 2m$. Soient λ la partition $(m+1, m-1, 0, \dots)$ et μ la partition $(m, m, 0, \dots)$. Prouver que l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contient $\mathcal{N}_\mu$.

[Si $(e_1, \dots, e_{m+1}, f_1, \dots, f_{m-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et si u est l'endomorphisme qui a dans cette base la matrice J_λ , on pourra considérer les images de $e_2 + f_1$ et εe_1 par u et ses itérés, pour tout nombre complexe non nul ε .]

E.5. Soit λ une partition de n . Montrer que l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la réunion des $\mathcal{N}_\mu$ où μ parcourt l'ensemble des partitions de n telles que $\mu \leq \lambda$.

Fin de l'épreuve