

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – B – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Valeurs d'adhérence de séries entières sur le cercle de convergence

La notation i étant réservée (c'est un nombre complexe dont le carré est -1) les candidats éviteront de l'utiliser à d'autres fins, par exemple comme indice de suite, de sommation ou de produit.

Première partie : convergence au sens de Césaro

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. On dit qu'elle est C -convergente si la suite $(m_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0, \quad m_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1}$$

est convergente et on appelle alors C -limite de $(a_n)_{n \geq 0}$ la limite de la suite $(m_n)_{n \geq 0}$.

1. Montrer que toute suite convergente est C -convergente et donner un exemple de suite C -convergente mais non convergente.

2. Montrer que si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est C -convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

3. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, la suite de terme général $a_n = (-1)^n n^\alpha$ est C -convergente.

Si $(b_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombre complexes, on dit que la série $\sum b_n$ est C -convergente si la suite des sommes partielles de la série est C -convergente et la C -limite de la suite des sommes partielles sera appelée C -limite de la série.

Soit $\sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note pour tout $n \geq 0$,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad \sigma_n(z) = \frac{S_0(z) + S_1(z) + \cdots + S_n(z)}{n+1}.$$

4. Soit z_0 un nombre complexe tel que la série $\sum c_n z_0^n$ soit C -convergente. Montrer que $|z_0| \leq R$.

Si $z_0 \in \mathbf{C}$ est tel que $\sum c_n z_0^n$ est C -convergente, on note $\sigma(z_0)$ sa C -limite. On note F l'ensemble des nombres complexes de module R pour lesquels la série est C -convergente.

5. Pour chacune des séries entières $\sum c_n z^n$ suivantes, déterminer le rayon de convergence, l'ensemble F et la valeur de $\sigma(z)$ pour tout $z \in F$.

5a. $\forall n \in \mathbf{N}, c_n = 1$.

5b. $\forall n \in \mathbf{N}, c_{2n} = \alpha, c_{2n+1} = \alpha + \beta, \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \beta \neq 0, 2\alpha + \beta \neq 0$.

5c. $\forall n \in \mathbf{N}, c_n = 1 + \alpha e^{in\lambda}, \alpha \in]0, 1[, \lambda \in \mathbf{R}$.

Deuxième partie : un théorème de Kronecker

On rappelle que des nombres réels $x_1, \dots, x_m$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ s'ils forment un système libre de $\mathbf{R}$ considéré comme $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel.

Soit $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Il est muni de la norme définie pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|.$$

Si $\lambda \in \mathbf{R}$, on désigne par $e_\lambda \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ la fonction définie par $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$. Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace de $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ engendré par les fonctions $e_\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$.

6a. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ qu'on note $M(f)$. Vérifier que $f \mapsto M(f)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}$.

6b. Montrer que $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ est une base de $\mathcal{E}$ et que pour tout $f \in \mathcal{E}$, $M(f)$ est la coordonnée de f suivant e_0 dans la base des $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$.

6c. Montrer que si $f, g \in \mathcal{E}$ alors il en est de même de fg . Dans le cas où g est à valeurs réelles positives, établir que $|M(fg)| \leq \|f\|_\infty M(g)$.

7. On pose pour tout entier $N \geq 0$, $K_N = \sum_{j=-N}^N \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j$.

7a. Montrer que $K_N(t) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{2j}{N+1} \cos((N+1-j)t)$.

7b. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$,

$$\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} = \sum_{k=0}^N e^{i(\frac{N}{2}-k)t} \text{ puis que } K_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2.$$

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier $n \geq 1$, des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, des nombres réels positifs $r_0, \dots, r_{n+1}$ et des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$.

Pour $j = 1, \dots, n+1$, on pose $a_j = r_j e^{i\alpha_j}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = r_0 + \sum_{j=1}^{n+1} a_j e^{i\lambda_j x}$.

8. Pour tout entier $N \geq 0$, on pose $g_N(x) = \prod_{p=1}^{n+1} K_N(\lambda_p x + \alpha_p)$.

8a. Écrire g_N comme combinaison linéaire de fonctions e_λ avec λ de la forme

$$\lambda = k_1 \lambda_1 + \dots + k_{n+1} \lambda_{n+1}, \quad k_i \in \{-N, \dots, N\}.$$

En déduire que $M(g_N) = 1$.

8b. Montrer que $M(fg_N) = r_0 + \frac{N}{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} r_j$.

8c. En déduire que $\|f\|_\infty = \sum_{j=0}^{n+1} r_j$, (on pourra utiliser 6c).

9. Soient $u_1, \dots, u_m$ des nombres complexes de module 1 et ε un réel strictement positif. On suppose que $|u_1 + \dots + u_m| \geq m - \varepsilon$. Montrer que si $k \neq j$ on a $|u_k + u_j| \geq 2 - \varepsilon$ et $|u_k - u_j| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$.

Dans la suite on suppose de plus que $\lambda_{n+1} = 2\pi$, $r_j = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$ et $\alpha_{n+1} = 0$, de sorte que $f(x) = 1 + \sum_{j=1}^n e^{i\alpha_j} e^{i\lambda_j x} + e^{i2\pi x}$.

10a. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} |f(x_m)| = n+2$.

10b. Montrer qu'une telle suite $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ vérifie pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j x_m} = e^{-i\alpha_j}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i2\pi x_m} = 1.$$

10c. Posons $x_m = N_m + y_m$, avec $y_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $N_m \in \mathbf{Z}$. Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} y_m = 0$, puis que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{-i\alpha_j}$.

11. Dans cette question, on considère le cas particulier où $\alpha_j = \pi$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, de sorte que $f(x) = 1 - \sum_{j=1}^n e^{i\lambda_j x} + e^{i2\pi x}$.

11a. Montrer que sur tout intervalle fermé borné I de $\mathbf{R}$, $\sup_{x \in I} |f(x)| < n+2$.

11b. En déduire l'existence d'une suite $(N'_m)_{m \in \mathbf{N}}$ d'entiers relatifs telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} N'_m = \pm\infty$

et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N'_m} = -1$. Que peut-on dire des suites $(e^{i2\lambda_j N'_m})_{m \in \mathbf{N}}$?

12. Dédurre de ce qui précède le théorème suivant.

Théorème de Kronecker. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels. Alors il existe une suite $(N_m)_{m \in \mathbf{N}}$ d'entiers naturels tels que $\lim_{m \rightarrow +\infty} N_m = +\infty$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{i\alpha_j}$.

Troisième partie : valeurs d'adhérence aux points de C -convergence

On rappelle que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ s'il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\phi(n)}$.

Les valeurs d'adhérence d'une série sont celles de la suite de ses sommes partielles. Si $\sum c_n z^n$ est une série entière et $z_0 \in \mathbf{C}$, on note $\mathcal{L}(z_0)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la série $\sum c_n z_0^n$. Dans cette partie, on étudie l'ensemble $\mathcal{L}(z_0)$, $z_0 \in F$, pour les exemples de la question 5. Les notations F , $\sigma(z)$ sont celles de la première partie.

13a. On reprend l'exemple 5a. Déterminer $\mathcal{L}(e^{ix})$, lorsque $\frac{x}{\pi} \in \mathbf{Q}$. Lorsque $\frac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$, montrer que $\mathcal{L}(e^{ix})$ est un cercle de centre $\sigma(e^{ix})$ dont on déterminera le rayon.

13b. On reprend l'exemple 5b. On suppose que $\frac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$, $\alpha \neq 0$ et $\frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbf{R}$. Montrer que $\mathcal{L}(e^{ix})$ est réunion de deux cercles de centre $\sigma(e^{ix})$ dont on déterminera les rayons.

13c. On reprend l'exemple 5c. On suppose que les nombres x, λ, π sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Montrer que pour $\alpha > 0$ suffisamment petit,

$$\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\zeta \in \mathbf{C}; |\zeta - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]\}$$

pour des réels $0 < r_1 < r_2$ que l'on déterminera.

* *

*