

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2012

FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet à traiter ci-après comprend 7 pages numérotées de 1 à 7.

## Notations

On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'anneau des entiers relatifs et  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes. Si  $0 \leq k \leq n$  sont des entiers, on pose :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Étant donné un entier  $n \geq 1$ , on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  l'algèbre des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , on note  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  le groupe des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de déterminant non nul et  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  formé des matrices de déterminant 1.

On note  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  l'algèbre des fonctions polynômiales de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $X_i$  désigne la fonction  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ . Pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on pose  $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$ . La famille  $(X^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  est une base de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  comme  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Pour tout entier  $k \geq 0$ , on note  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$  l'ensemble des fonctions polynômiales homogènes d'ordre  $k$ , c'est-à-dire des fonctions  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  telles qu'on ait  $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  et tout  $x \in \mathbb{C}^n$ .

## I

Soit un entier  $n \geq 1$ .

1. Montrer que  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_0$  est composé des fonctions constantes sur  $\mathbb{C}^n$ .
2. Montrer que, pour tout  $k \geq 0$ , l'ensemble  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , et calculer sa dimension en fonction de  $n$  et  $k$ .
3. Montrer que  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  est la somme directe des sous-espaces  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$ ,  $k \geq 0$ .
4. Soit un entier  $m \geq 1$ , et soit  $u$  une application linéaire de  $\mathbb{C}^m$  dans  $\mathbb{C}^n$ .
  - 4.a. Montrer que, pour tout  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , la fonction composée  $f \circ u$  appartient à  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$ .
  - 4.b. Montrer que l'application  $f \mapsto f \circ u$  est une application linéaire de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  dans  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$ , et que c'est un isomorphisme si et seulement si  $u$  est un isomorphisme.

## II

Dans cette partie, on note  $\mathcal{V}$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Une fonction  $\Phi$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{C}$  est dite polynômiale si la fonction :

$$(a, b, c) \mapsto \Phi \left( \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right)$$

de  $\mathbb{C}^3$  dans  $\mathbb{C}$  est polynômiale. Pour toute matrice  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , on note  ${}^tA$  la transposée de  $A$ .

1. Soit  $M \in \mathcal{V}$  inversible.
  - 1.a. Déterminer l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  de la forme  ${}^tAMA$  avec  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ .
  - 1.b. Déterminer l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  de la forme  ${}^tAMA$  avec  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ .
2. Soit  $\Phi$  une fonction polynômiale de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{C}$ .
  - 2.a. Montrer que, pour tout  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , la fonction  $\Phi^A$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$\Phi^A : M \mapsto \Phi({}^tAMA)$$

est polynômiale sur  $\mathcal{V}$ .

- 2.b. Montrer que la fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$x \mapsto \Phi \left( \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est polynômiale sur  $\mathbb{C}$ .

3. Soit  $f$  une fonction polynômiale de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que la fonction  $\Phi = f \circ \det$  est polynômiale de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{C}$  et vérifie  $\Phi^A = \Phi$  pour tout  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ .
4. Montrer que toute fonction polynômiale de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{C}$  est continue sur  $\mathcal{V}$ .
5. Soit  $\Phi$  une fonction polynômiale de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant  $\Phi^A = \Phi$  pour tout  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe une unique fonction polynômiale  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $\Phi = f \circ \det$ .

## III

Soit un entier  $n \geq 1$ . Un *monôme* de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  est un élément de la forme  $\lambda X^\alpha$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  non nul et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Étant donnés  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  dans  $\mathbb{N}^n$ , on note :

$$\alpha \prec \beta$$

si  $\alpha \neq \beta$ , et si le premier coefficient non nul de  $\beta - \alpha$  est strictement positif, c'est-à-dire si le plus petit entier  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\beta_i \neq \alpha_i$  vérifie  $\beta_i - \alpha_i > 0$ . On note  $\alpha \preceq \beta$  si l'on a soit  $\alpha = \beta$ , soit  $\alpha \prec \beta$ .

1. Montrer que  $\preceq$  est une relation d'ordre total sur  $\mathbb{N}^n$ .
2. Montrer que toute partie finie non vide de  $\mathbb{N}^n$  possède un plus grand élément pour la relation d'ordre  $\preceq$ .
3. Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ . Montrer que  $\alpha \preceq \beta$  si et seulement si  $\alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$ .
4. Pour toute fonction  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  non nulle, on note  $\deg(f)$  le plus grand  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  pour la relation d'ordre  $\preceq$  tel que le coefficient de  $f$  dans la base  $(X^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  soit non nul, qu'on appelle le *degré* de  $f$ . Montrer que, pour toutes  $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  non nulles, on a  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ .
5. Soit  $k \geq 1$  un entier et soient  $f, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  non nulles. Montrer qu'il existe  $r, q_1, \dots, q_k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  vérifiant les deux conditions suivantes :
  1.  $f = b_1 q_1 + \dots + b_k q_k + r$  ;
  2. si  $r$  contient un monôme de degré  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , alors pour tout entier  $i \in \{1, \dots, k\}$  l'un des coefficients de  $\alpha - \deg(b_i)$  est strictement négatif.
6. Pour toute partie  $\Lambda$  de  $\mathbb{N}^n$ , on note  $I(\Lambda)$  l'idéal de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  engendré par les  $X^\alpha$ ,  $\alpha \in \Lambda$ . Soit  $\Lambda$  une partie de  $\mathbb{N}^n$ .
  - 6.a. Soit  $\beta \in \mathbb{N}^n$ . Montrer que  $X^\beta \in I(\Lambda)$  si et seulement s'il existe  $\alpha \in \Lambda$  tel qu'on ait  $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$ .
  - 6.b. Soit  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ . Montrer que  $f \in I(\Lambda)$  si et seulement si tous les monômes de  $f$  appartiennent à  $I(\Lambda)$ .
  - 6.c. Montrer qu'il existe une partie finie  $\Lambda_0$  de  $\Lambda$  telle que  $I(\Lambda_0) = I(\Lambda)$ .
7. Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ . En considérant l'idéal engendré par les  $X^{\deg(f)}$  pour  $f \in I$  non nuls, montrer qu'il existe une partie finie  $F$  de  $I$  qui engendre  $I$ .
8. Soit  $(f_k)_{k \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , et soit  $I$  l'idéal de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  engendré par les  $f_k$ ,  $k \geq 0$ . Montrer qu'il existe un entier  $r \geq 0$  tel que  $I$  soit engendré par  $f_0, \dots, f_r$ .

## IV

Soit un entier  $m \geq 0$ . On note  $\mathcal{B}_m = \mathbb{C}[U, V]_m$  l'espace des fonctions polynômiales de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}$  qui sont homogènes d'ordre  $m$ . Pour chaque entier  $i \in \{0, \dots, m\}$ , on note  $e_i$  la fonction polynômiale :

$$\binom{m}{i} U^{m-i} V^i : (u, v) \mapsto \binom{m}{i} u^{m-i} v^i.$$

Les fonctions  $e_0, e_1, \dots, e_m$  forment une base de  $\mathcal{B}_m$ . On identifiera  $\mathcal{B}_m$  à  $\mathbb{C}^{m+1}$  au moyen de cette base. Une fonction  $\Phi$  de  $\mathcal{B}_m$  dans  $\mathbb{C}$  sera donc dite polynômiale si la fonction :

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto \Phi(x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_m e_m)$$

de  $\mathbb{C}^{m+1}$  dans  $\mathbb{C}$  est polynômiale. On note  $\mathcal{E}_m = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_m]$  l'algèbre des fonctions polynômiales de  $\mathcal{B}_m$  dans  $\mathbb{C}$ . Enfin, si  $f \in \mathcal{B}_m$  et si :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),$$

on note  $f^A$  la fonction de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$f^A : (u, v) \mapsto f(A(u, v)) = f(au + bv, cu + dv).$$

**1.** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

**1.a.** Montrer que l'application  $f \mapsto f^A$  définit un endomorphisme linéaire de  $\mathcal{B}_m$ .

**1.b.** Pour tout  $\Phi \in \mathcal{E}_m$ , on note  $\Phi^A$  la fonction de  $\mathcal{B}_m$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$\Phi^A : f \mapsto \Phi(f^A).$$

Montrer que l'application  $\Phi \mapsto \Phi^A$  définit un endomorphisme linéaire de  $\mathcal{E}_m$ .

**2.** Pour tout  $k \geq 0$ , on note  $\mathcal{E}_{m,k}$  le sous-espace de  $\mathcal{E}_m$  composé des fonctions homogènes d'ordre  $k$ . Montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , l'endomorphisme  $\Phi \mapsto \Phi^A$  laisse stable chacun des sous-espaces  $\mathcal{E}_{m,k}$ ,  $k \geq 0$ .

**3.** Soient des entiers  $k, p \geq 0$ . On note  $\mathcal{E}_{m,k,p}$  le sous-espace de  $\mathcal{E}_{m,k}$  engendré par les  $X^\nu$  avec  $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$  tels que  $\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_m = k$  et  $\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + m\nu_m = p$ . Montrer que  $\mathcal{E}_{m,k}$  est la somme directe des  $\mathcal{E}_{m,k,p}$  pour  $p \geq 0$ .

4. Pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$ , on note  $D_i$  l'application linéaire de  $\mathcal{E}_m$  dans  $\mathcal{E}_m$  de dérivation par rapport à  $X_i$ . On définit deux endomorphismes linéaires  $D$  et  $D'$  de  $\mathcal{E}_m$  par :

$$D(\Phi) = \sum_{i=1}^m iX_{i-1}D_i(\Phi), \quad D'(\Phi) = \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)X_{i+1}D_i(\Phi)$$

pour tout  $\Phi \in \mathcal{E}_m$ . Soient des entiers  $k \geq 0$  et  $p \geq 0$ .

4.a. Montrer qu'on a  $D(\mathcal{E}_{m,k,p+1}) \subseteq \mathcal{E}_{m,k,p}$  et  $D'(\mathcal{E}_{m,k,p}) \subseteq \mathcal{E}_{m,k,p+1}$ .

4.b. Montrer que, pour tout  $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$ , on a :

$$(DD' - D'D)(\Phi) = (mk - 2p)\Phi.$$

4.c. Pour tout entier  $n \geq 0$ , on note respectivement  $D^n$  et  $D'^n$  les puissances  $n$ -ièmes des endomorphismes  $D$  et  $D'$ . Montrer que, pour tout entier  $r \geq 1$  et tout  $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$ , on a :

$$(D^r D' - D' D^r)(\Phi) = r(mk - 2p + r - 1)D^{r-1}(\Phi) \quad (1)$$

et :

$$(DD'^r - D'^r D)(\Phi) = r(mk - 2p - r + 1)D'^{r-1}(\Phi). \quad (2)$$

4.d. On suppose que  $mk - 2p = 0$ . Montrer que, pour tout  $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$ , on a  $D(\Phi) = 0$  si et seulement si  $D'(\Phi) = 0$ . (On pourra commencer par montrer que  $D$  et  $D'$  sont des endomorphismes nilpotents de  $\mathcal{E}_{m,k}$ .)

5. Soit un entier  $k \geq 0$ , et soit  $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k}$  une fonction non nulle.

5.a. Montrer que  $\Phi^A = \Phi$  pour toute matrice  $A$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

si et seulement si  $mk$  est pair et  $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,mk/2}$ .

5.b. Montrer que  $\Phi^A = \Phi$  pour toute matrice  $A$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{C},$$

si et seulement si  $D(\Phi) = 0$ .

5.c. Montrer que  $\Phi^A = \Phi$  pour toute matrice  $A$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{C},$$

si et seulement si  $D'(\Phi) = 0$ .

6. On note  $\mathcal{I}_m$  l'ensemble des fonctions  $\Phi \in \mathcal{E}_m$  telles que  $\Phi^A = \Phi$  pour tout  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ .
- 6.a. Montrer que  $\mathcal{I}_m$  est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}_m$ .
- 6.b. Montrer que  $\mathcal{I}_m$  est la somme directe des  $\mathcal{I}_{m,k} = \mathcal{I}_m \cap \mathcal{E}_{m,k}$  pour  $k \geq 0$ .
7. Soit un entier  $k \geq 0$  tel que  $\mathcal{I}_{m,k}$  soit de dimension  $\geq 1$ .
- 7.a. Montrer que  $mk$  est pair et que  $\mathcal{I}_{m,k}$  est inclus dans  $\mathcal{E}_{m,k,mk/2}$ .
- 7.b. Montrer que, pour tout  $\Phi \in \mathcal{I}_{m,k}$  et tout  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , on a  $\Phi^A = \det(A)^{mk/2} \Phi$ .

## V

Une fonction  $\Phi$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}$  est dite polynômiale si la fonction :

$$(a, b, c, d) \mapsto \Phi \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$$

de  $\mathbb{C}^4$  dans  $\mathbb{C}$  est polynômiale. On note  $\mathcal{P}$  l'algèbre des fonctions polynômiales de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}$ . On note  $D_a, D_b, D_c, D_d$  les endomorphismes de dérivation par rapport à  $a, b, c, d$  respectivement, et on pose :

$$\Omega = D_a D_d - D_b D_c,$$

qui est un endomorphisme du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{P}$ .

1. Soit  $G \in \mathcal{P}$  et soit  $B \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ . On note  $F$  la fonction de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $F : A \mapsto G(AB)$ . Montrer que  $F$  est polynômiale et que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on a :

$$\Omega(F)(A) = \Omega(G)(AB) \det(B).$$

2. Soit  $\Phi \in \mathcal{E}_m$  et soit un entier  $r \geq 0$ . Pour tout  $f \in \mathcal{B}_m$ , on définit une fonction  $G_f$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}$  par :

$$G_f : A \mapsto \Phi(f^A) \det(A)^r. \quad (3)$$

- 2.a. Soit  $f \in \mathcal{B}_m$ . Montrer que  $G_f$  appartient à  $\mathcal{P}$ .
- 2.b. Montrer qu'il y a un entier  $q \geq r$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{B}_m$ , la fonction  $\Omega^q(G_f)$  soit constante sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , où  $\Omega^q$  désigne la puissance  $q$ -ième de l'endomorphisme  $\Omega$ .
- 2.c. Soit un entier  $q \geq r$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{B}_m$ , la fonction  $\Omega^q(G_f)$  soit constante sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Montrer que la fonction  $\Theta$  de  $\mathcal{E}_m$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$\Theta : f \mapsto \Omega^q(G_f)$$

appartient à  $\mathcal{I}_m$  et vérifie  $\Theta(f^A) = \Theta(f) \det(A)^{q-r}$  pour tout  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ .

3. Soit un entier  $q \geq 0$  et soit  $G$  la fonction de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $G(A) = \det(A)^q$ . Calculer  $\Omega^q(G)$  en fonction de  $q$ .
4. Soit un entier  $k \geq 0$ , et soit  $\Psi \in \mathcal{I}_{m,k}$ . Montrer qu'il existe une fonction  $\Phi \in \mathcal{E}_m$  et des entiers  $0 \leq r \leq q$  tels que, pour tout  $f \in \mathcal{B}_m$ , la fonction  $\Omega^q(G_f)$  soit constante sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et de valeur  $\Psi(f)$ .
5. Soit un entier  $r \geq 1$ , soient  $\Psi_1, \dots, \Psi_r \in \mathcal{I}_m$  et soient  $\Phi_1, \dots, \Phi_r \in \mathcal{E}_m$  tels que :

$$\Psi = \Phi_1 \Psi_1 + \dots + \Phi_r \Psi_r$$

appartienne à  $\mathcal{I}_m$ . Montrer qu'il existe  $\Pi_1, \dots, \Pi_r \in \mathcal{I}_m$  tels que  $\Psi = \Pi_1 \Psi_1 + \dots + \Pi_r \Psi_r$ .

6. Montrer qu'il existe un entier  $r \geq 1$  et des fonctions  $\Psi_1, \dots, \Psi_r \in \mathcal{I}_m$  telles que, pour toute fonction  $\Psi \in \mathcal{I}_m$ , il existe  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  telle que  $\Psi = f(\Psi_1, \dots, \Psi_r)$ .

**FIN**