Composition de Mathématiques D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Sujet saisi par Michel Quercia (michel.quercia@prepas.org) d'après l'original.

Polynômes hyperboliques

Préambule

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\text{Pol}(\mathbb{K}^n)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^n$, dont la base canonique est constituée des fonctions monômes $x \mapsto x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, où $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées de x . Par convention, on aura toujours $x_j^0 = 1$, même lorsque $x_j = 0$. L'écriture d'une fonction polynomiale comme combinaison linéaire de fonctions monômes étant unique, on utilisera par la suite les mots *monôme* et *polynôme* pour désigner des fonctions monômes ou polynomiales.

Le *degré* du monôme $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ est l'entier $m_1 + \dots + m_n$. Un polynôme $P \in \text{Pol}(\mathbb{K}^n)$ est dit *homogène* de degré d s'il est combinaison linéaire des monômes de degré d . Les polynômes homogènes de degré d sur $\mathbb{K}^n$ forment donc un espace vectoriel que l'on note $\text{Hom}_d(\mathbb{K}^n)$. Par exemple, $\text{Hom}_2(\mathbb{K}^n)$ est l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{K}^n$.

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n , le choix d'une base $\mathcal{B}$ de V permet d'identifier V à $\mathbb{K}^n$; on peut donc parler de polynômes et de polynômes homogènes sur V . On admettra que ces deux notions sont indépendantes du choix de $\mathcal{B}$, et on notera $\text{Pol}(V)$ (respectivement $\text{Hom}_d(V)$) l'espace vectoriel formé des polynômes (respectivement des polynômes homogènes de degré d) sur V .

Si $j, k \in \mathbb{Z}$ sont deux entiers, on notera $\llbracket j, k \rrbracket$ l'ensemble des entiers $i \in \mathbb{Z}$ tels que $j \leq i \leq k$. Si $k < j$, $\llbracket j, k \rrbracket$ est donc vide.

1) Si $P \in \text{Hom}_d(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$, calculer $\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial P}{\partial x_j}(v)$ en fonction de $P(v)$.

Le problème traite des polynômes *hyperboliques*. Soit V un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, soient $d \geq 1$ un entier et $a \in V$ un vecteur non nul ; on dit qu'un polynôme homogène p de degré d sur V (donc un élément de $\text{Hom}_d(V)$) est *hyperbolique dans la direction* a si d'une part $p(a) \neq 0$, et d'autre part, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, les racines du polynôme à une variable

$$t \mapsto p(ta - x)$$

sont réelles. Remarquons que si $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, p est encore hyperbolique dans la direction de sa ; ce qui explique l'emploi du mot *direction* dans la terminologie ci-dessus.

2) Vérifier que dans cette définition, les racines de $t \mapsto p(ta - x)$, comptées avec leurs multiplicités, sont au nombre de d .

Ces racines seront notées $\lambda_1(x, a), \dots, \lambda_d(x, a)$ et rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1(x, a) \leq \dots \leq \lambda_d(x, a).$$

- 3) Exprimer $p(x)$ au moyen de $p(a)$ et des $\lambda_j(x, a)$. Si $s \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction du signe de s les $\lambda_j(sx, a)$ et les $\lambda_j(x + sa, a)$ au moyen des $\lambda_j(x, a)$.

I Exemples

- 4) Montrer que la fonction $S \mapsto \det(S)$ est un polynôme homogène sur l'espace $\text{Sym}_m(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles à m lignes et m colonnes, et que ce polynôme est hyperbolique dans une direction convenable.
- 5) Pour quelles valeurs de l'entier k compris entre 1 et n , la forme quadratique

$$q(x) = \sum_{j=1}^k x_j^2 - \sum_{j=k+1}^n x_j^2$$

est-elle hyperbolique sur $\mathbb{R}^n$, dans une direction convenable ?

- 6) Si $d \geq 2$ et si $p \in \text{Hom}_d(V)$ est hyperbolique dans une direction a , montrer que la formule

$$x \mapsto \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial p}{\partial x_j}(x)$$

définit un polynôme hyperbolique dans la même direction. On notera ce polynôme $a \cdot \nabla p$.

- 7) Soit $n \geq 2$ et $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ des entiers. On définit sur $\mathbb{R}^n$ de d -ième *polynôme symétrique élémentaire* Σ_d comme suit

$$\Sigma_d(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq n} x_{j_1} \dots x_{j_d}.$$

Montrer que Σ_d est hyperbolique dans la direction $e = (1, \dots, 1)$.

II Continuité des racines

- 8) Soit n et d deux entiers strictement positifs, et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction. On se donne un élément $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose que, pour toute suite (x^m) dans $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $\bar{x}$, il existe une sous-suite $(x^{\varphi(k)})$ (avec φ strictement croissante) telle que la suite $(F(x^{\varphi(k)}))$ converge vers $F(\bar{x})$. Montrer que F est continue en $\bar{x}$.
- 9) Soit $p \in \text{Hom}_d(V)$ un polynôme hyperbolique dans une direction a , où $d \geq 1$ et $\dim(V) = n \geq 1$. On définit l'application

$$\Lambda : \begin{cases} V & \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x & \longmapsto (\lambda_1(x, a), \dots, \lambda_d(x, a)). \end{cases}$$

- a) Si une suite (x^m) de V est bornée, montrer que les suites $(\lambda_j(x^m, a))$ sont bornées elles-aussi.
- b) En utilisant la question 8), montrer que Λ est continue.

III Le cône du futur

Si $p \in \text{Hom}_d(V)$ est hyperbolique dans la direction a , on désigne par $C(p, a)$ l'ensemble des vecteurs $x \in V$ qui satisfont $\lambda_1(x, a) > 0$.

- 10) Vérifier que $C(p, a)$ est étoilé par rapport à a . Montrer que $C(a \cdot \nabla p, a) \supset C(p, a)$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que pour tout x non colinéaire à a , on a les inégalités strictes

$$\lambda_1(x, a) < \dots < \lambda_d(x, a),$$

et on dit alors que p est *strictement hyperbolique dans la direction* a .

- 11) Soit $b \in C(p, a)$ et $x \in V$. Si $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, montrer que la fonction

$$\varphi_j : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \lambda_j(tb + x, a) \end{cases}$$

est surjective. Lorsque $d \geq 2$, à quelle condition existe-t-il deux indices distincts j et k et un nombre $t \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_j(t) = \varphi_k(t)$?

- 12) En déduire que p est strictement hyperbolique dans la direction b .
- 13) Montrer que les φ_j sont strictement croissantes.
- 14) Soit $x, y \in V$. Montrer que $t \mapsto \lambda_1(ty + x, a) - t\lambda_1(y, a)$ est croissante. En déduire que $x \mapsto \lambda_1(x, a)$ est concave et que $C(p, a)$ est un cône convexe.
- 15) Soit $x, b \in C(p, a)$. Montrer que $\lambda_1(x, b) > 0$.
- 16) En déduire que si $b \in C(p, a)$ alors $C(p, b) = C(p, a)$.

IV Le cas général

On admet dans cette partie l'énoncé suivant (légèrement moins précis qu'un *lemme de Rouché*) :

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. On suppose que $P(\omega) = 0$ et que

$$\sup\{|Q(z)| ; |z - \omega| = \varepsilon\} < \inf\{|P(z)| ; |z - \omega| = \varepsilon\}.$$

Alors $P + Q$ a au moins une racine ω' telle que $|\omega' - \omega| < \varepsilon$.

- 17) Soit $R = R(x, y) \in \text{Pol}(\mathbb{C}^2)$ un polynôme s'annulant en $(0, 0)$. On suppose que le polynôme $x \mapsto R(x, 0)$ n'est pas nul et on note m la multiplicité de sa racine $x = 0$. De même, on suppose que le polynôme $y \mapsto R(0, y)$ n'est pas nul et on note r la multiplicité de sa racine $y = 0$.
- a) Montrer qu'il existe des entiers $\alpha, \beta > 0$ premiers entre eux, et deux polynômes R_0 et R_1 vérifiant les conditions suivantes :
- $R(x, y) = R_0(x, y) + R_1(x, y)$;
 - $R_0(x, y) = x^m Q_0(y^\alpha/x^\beta)$, où $Q_0 \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $0 < \beta \deg(Q_0) \leq m$;
 - R_1 est une combinaison linéaire de monômes $x^i y^j$ pour lesquels $\alpha i + \beta j \geq \alpha m + 1$.
- Vérifier que $Q_0(0) \neq 0$.

- b) Montrer qu'il existe des polynômes $\widehat{R} \in \mathbb{C}[X]$ et $S \in \text{Pol}(\mathbb{C}^2)$ satisfaisant l'identité

$$R(zu^\alpha, u^\beta) = u^{\alpha m} (\widehat{R}(z) + uS(z, u)).$$

Montrer de plus que $\widehat{R}$ possède une racine $\omega \neq 0$.

- c) Si ω n'est pas réelle, montrer que pour tout $u \in \mathbb{C}$ assez petit, il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $R(zu^\alpha, u^\beta) = 0$.

- 18) On reprend les notations de la question précédente et on suppose que lorsque y est réel, les racines de $R(x, y)$ sont toutes réelles.
- a) Montrer que les racines de $\widehat{R}$ sont toutes réelles.
- b) Montrer que l'ensemble des racines de $\widehat{R}$ est stable par multiplication par $e^{2i\alpha\pi/\beta}$. En déduire que $\beta \leq 2$.
- c) En considérant aussi les points de la forme $(zu^\alpha, -u^\beta)$, montrer qu'en fait $\beta = 1$.
- d) En déduire que $r \geq m$.
- 19) Soit p un polynôme homogène de degré $d \geq 1$ sur un espace vectoriel réel V de dimension $n \geq 2$, hyperbolique dans la direction de $a \neq 0$. On ne suppose pas que p soit strictement hyperbolique. On se donne $b \in C(p, a)$.
- a) Soit $x \in V$ et $s^* \in \mathbb{R}$; on utilise les fonctions φ_j définies à la question III-11). Soit t^* une racine réelle de $t \mapsto p(s^*a - tb - x)$, de multiplicité r . Montrer qu'au plus r d'entre les fonctions φ_j prennent la valeur s^* en t^* .
- b) En déduire que p est hyperbolique dans la direction b .

Les preuves des autres résultats de la partie III restant valables, on pourra utiliser par la suite le fait que

- $x \mapsto \lambda_1(x, a)$ est concave et $C(p, a)$ est un cône convexe ;
- si $b \in C(p, a)$, alors $C(p, b) = C(p, a)$.

V L'inégalité de Gårding sur le cône $C(p, a)$

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n et $d \geq 2$ un entier. Une application

$$M : V^d = \underbrace{V \times \dots \times V}_{d \text{ copies}} \rightarrow \mathbb{R}$$

est dite *symétrique* si

$$M(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}) = M(x_1, \dots, x_d),$$

pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_d \in V$ et pour toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Une *forme d-linéaire symétrique* est une application M comme ci-dessus, qui satisfait de plus

$$M(\lambda x_1 + \mu y_1, x_2, \dots, x_d) = \lambda M(x_1, x_2, \dots, x_d) + \mu M(y_1, x_2, \dots, x_d),$$

pour tous vecteurs $y_1, x_1, \dots, x_d \in V$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Soit M une forme d -linéaire symétrique. La fonction p définie par

$$p(x) = M(x, \dots, x), \quad \forall x \in V$$

est alors polynomiale, homogène de degré d . On suppose que p est hyperbolique dans la direction de a , un vecteur non nul.

20) Soit $b \in C(p, a)$.

a) Prouver l'identité $dM(x, b, \dots, b) = p(b) \sum_{j=1}^d \lambda_j(x, b)$, $\forall x \in V$.

b) En déduire que $M(a, b, \dots, b) \geq p(a)^{1/d} p(b)^{(d-1)/d}$.

On pourra admettre sans démonstration *l'inégalité arithmético-géométrique* : si $u_1, \dots, u_d$ sont des nombres réels positifs, alors

$$\frac{1}{d}(u_1 + \dots + u_d) \geq (u_1 \dots u_d)^{1/d}.$$

21) Vérifier que $x \mapsto M(a, x, \dots, x)$ est un polynôme hyperbolique sur V , dans la direction de a .

22) Montrer que pour tout choix des vecteurs $x^1, \dots, x^d$ dans $C(p, a)$, on a

$$M(x^1, \dots, x^d) \geq \prod_{j=1}^d p(x^j)^{1/d}.$$

On pourra faire un raisonnement par récurrence sur le degré d .

23) Applications :

a) Soit $m \geq 1$ et B la forme polaire d'une forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $\alpha > \sqrt{q(u)}$ et $\beta > \sqrt{q(v)}$, montrer que

$$\alpha\beta - B(u, v) \geq \sqrt{(\alpha^2 - q(u))(\beta^2 - q(v))}.$$

b) Si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on définit son *permanent*

$$\text{per}(A) = \sum_{\rho \in \text{Bij}_d} a_{1\rho(1)} \dots a_{d\rho(d)},$$

où Bij_d désigne l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, d\}$ dans lui-même. Si A est à coefficients positifs, montrer l'inégalité

$$\text{per}(A) \geq (d!) \left(\prod_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij} \right)^{1/d}.$$

VI Concavité de $p^{1/d}$ sur le cône $C(p, a)$

On reprend les notations de la partie V. On pourra admettre que pour tout polynôme homogène p de degré d sur V , il existe une forme d -linéaire symétrique M sur V telle que $p(x) = M(x, \dots, x)$ pour tout x dans V .

24) Soit $x, y \in C(p, a)$. En exprimant $p(x + y)$ au moyen de M , montrer que

$$p(x + y) \geq (p(x)^{1/d} + p(y)^{1/d})^d.$$

En déduire que la fonction $x \mapsto p(x)^{1/d}$ est concave sur $C(p, a)$.

25) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques définies positives à d lignes et d colonnes est un cône convexe, sur lequel l'application $S \mapsto (\det S)^{1/d}$ est concave.

VII Inégalités de Weyl

On considère dans cette partie un polynôme homogène p sur un espace vectoriel V de dimension $n \geq 3$. On suppose que p est strictement hyperbolique (voir III pour cette notion) dans la direction de a , de degré $d \geq 2$. Comme on ne considérera pas d'autre direction d'hyperbolicité que a , on notera $\lambda_r(x)$ au lieu de $\lambda_r(x, a)$. On se donne trois indices $i, j, k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ vérifiant $j \leq i$ et $k + 1 = i + j$. On suppose, jusqu'à la question 30 qu'il existe deux vecteurs $x, y \in V$ tels que

$$\lambda_k(x + y) < \lambda_i(x) + \lambda_j(y).$$

26) Montrer que nécessairement, $k \geq 2$.

27) Montrer qu'il existe $u, v \in V$ satisfaisant

$$\lambda_k(u + v) < \lambda_i(u), \quad \lambda_r(v) < 0 \text{ si } r < j, \quad \lambda_r(v) > 0 \text{ si } r \geq j.$$

28) On choisit un élément λ^* de l'intervalle $]\lambda_k(u + v), \lambda_i(u)[$, et on considère les fonctions $\varphi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $\varphi_r(t) = \lambda_r(u + tv)$, $r \in \llbracket 1, d \rrbracket$. En examinant les valeurs de φ_r en $t = 0$, $t = 1$ et au voisinage de $\pm\infty$, donner un minorant du nombre de solutions de l'équation $\varphi_r(t) = \lambda^*$. Ce minorant dépend de l'indice r .

29) a) En déduire que le nombre de racines du polynôme $t \mapsto p(\lambda^* a - u - tv)$ est minoré par

$$\begin{aligned} D = & \text{card}(\llbracket j, d \rrbracket \cap \llbracket 1, d + 1 - j \rrbracket) \\ & + \text{card}(\llbracket 1, j - 1 \rrbracket \cap \llbracket d + 2 - j, d \rrbracket) \\ & + 2 \text{card}(\llbracket 1, j - 1 \rrbracket \cap \llbracket 1, d + 1 - j \rrbracket \cap \llbracket i, d \rrbracket) \\ & + 2 \text{card}(\llbracket j, d \rrbracket \cap \llbracket d + 2 - j, d \rrbracket \cap \llbracket 1, k \rrbracket) \\ & + 2 \text{card}(\llbracket j, d \rrbracket \cap \llbracket 1, d + 1 - j \rrbracket \cap \llbracket i, k \rrbracket). \end{aligned}$$

b) Simplifier cette identité en

$$D = \text{card}(\llbracket j, d + 1 - j \rrbracket) + 2 \text{card}(\llbracket d + 2 - j, k \rrbracket) + 2 \text{card}(\llbracket j, d + 1 - j \rrbracket \cap \llbracket i, k \rrbracket).$$

30) Montrer que $D = d + 2$.

31) Finalement, en conclure que si des entiers $i, j, \ell \in \llbracket 1, d \rrbracket$ sont tels que $\ell \geq i + j - 1$, alors on a

$$\lambda_\ell(x + y) \geq \lambda_i(x) + \lambda_j(y), \quad \forall x, y \in V.$$

32) Cette inégalité est-elle encore vraie lorsque le polynôme hyperbolique p n'est pas strictement hyperbolique ?

* *
*