

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Ce sujet porte sur l'étude des formes quadratiques sur un corps de caractéristique nulle et des groupes d'isométries associés.

Notations, Définitions

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désignera un corps de caractéristique nulle, c'est-à-dire un corps tel que, pour tout entier $n \neq 0$, on a $n \cdot 1 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ où 1 désigne l'unité de la loi multiplicative de $\mathbb{K}$, et $n \cdot 1 = 1 + \dots + 1$.

Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension *finie*. On rappelle les trois points suivants.

- Une *forme bilinéaire symétrique* sur V est une application $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

$$b(x, y) = b(y, x) \text{ et } b(x + \lambda y, z) = b(x, z) + \lambda b(y, z)$$

pour tous $x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Une *forme quadratique* sur V est une application $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in V$;

ii) l'application $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $(x, y) \mapsto \tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$ est bilinéaire symétrique.

- Une forme quadratique est dite *non dégénérée* si, pour tout $v \in V - \{0\}$, il existe $w \in V$ tel que $\tilde{q}(v, w) \neq 0$.

On notera $\mathcal{Q}(V)$ l'ensemble des formes quadratiques *non dégénérées* sur V .

Soient V et V' deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

- Une *isométrie* entre deux formes quadratiques $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ et $q' : V' \rightarrow \mathbb{K}$ est un isomorphisme linéaire $f : V \rightarrow V'$ tel que $q' \circ f = q$. On notera $q \cong q'$ si q et q' sont isométriques, c'est-à-dire s'il existe une isométrie entre q et q' .

On notera $O(q) := \{ f \in \text{GL}(V) \mid q \circ f = q \}$ le sous ensemble de $\text{GL}(V)$ des isométries $f : V \rightarrow V$ entre q et elle-même. On appelle $O(q)$ le *groupe orthogonal* de q .

Les deuxième et troisième parties du problème sont largement indépendantes.

Préliminaires sur les formes quadratiques et les isométries

Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$. On note $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ la forme quadratique q définie sur $\mathbb{K}^n$ par la formule

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2.$$

- Démontrer que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ est bien une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$.
- Démontrer que l'application $q \mapsto \tilde{q}$ est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques sur V sur les formes bilinéaires *symétriques* sur V .
- Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est une base de V . On associe à toute forme bilinéaire symétrique b sur V une matrice symétrique $\Phi_{\mathcal{B}}(b) := (b(e_i, e_j))_{i,j=1\dots n}$ appelée *matrice de b dans la base $\mathcal{B}$* . On rappelle que $b \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}(b)$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur V et celui des matrices symétriques carrées de taille n .
 - Démontrer qu'une forme quadratique q sur V est non dégénérée si et seulement si le déterminant $\det(\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q}))$ est non nul.
 - Quelle est la matrice de $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$? En déduire que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$.
- Soit $q \in \mathcal{Q}(V)$ une forme quadratique non dégénérée sur V .
 - Soit V' un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et q' une forme quadratique sur V' . Démontrer que si q et q' sont isométriques, alors q' est dans $\mathcal{Q}(V')$, c'est-à-dire non dégénérée.
 - Pour $x \neq 0$, on note $\{x\}^\perp := \{y \in V \mid \tilde{q}(x, y) = 0\}$. Montrer que $\{x\}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension $n - 1$.
 - A quelle condition sur x le sous-espace $\{x\}^\perp$ est-il un supplémentaire de la droite $\mathbb{K}x$ dans V ?
- Soient $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $q' \in \mathcal{Q}(V')$ où V' est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que $O(q)$ est un sous-groupe de $\text{GL}(V)$ et que si $q \cong q'$, alors $O(q)$ et $O(q')$ sont deux groupes isomorphes.

Première partie : Existence des bases orthogonales

Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $q \in \mathcal{Q}(V)$.

6. On dit que q est *isotrope* s'il existe $x \in V - \{0\}$ tel que $q(x) = 0$. Dans le cas contraire, on dit que q est *anisotrope*.
 - (a) Démontrer qu'il existe $x \in V$ tel que $q(x) \neq 0$.
 - (b) On note h la forme quadratique sur $\mathbb{K}^2$ définie par $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$ (on ne demande pas de vérifier que h est une forme quadratique). Montrer que si V est de dimension deux et q est isotrope alors q est isométrique à h .
 - (c) Démontrer que si $q \in \mathcal{Q}(V)$ est isotrope, alors $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ est surjective.
7. Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V est dite *orthogonale pour q* si $\tilde{q}(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.
 - (a) Montrer qu'il existe une base orthogonale pour q .
Indication : on pourra considérer $\{x\}^\perp = \{y \in V \mid \tilde{q}(x, y) = 0\}$ et utiliser les questions 4c et 6a.
 - (b) En déduire qu'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$ tels que $q \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Deuxième partie : Étude de $O(q)$ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose dans cette partie que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

8. Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 1$). Démontrer qu'il existe un couple d'entiers (r, s) ($r + s = n$) tel que q soit isométrique à $Q_{r,s}$ définie sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par

$$Q_{r,s}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r x_i^2 - \sum_{j=r+1}^n x_j^2.$$

Soit $j : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'isomorphisme linéaire qui à tout endomorphisme associe sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note $O_{r,s} := j(O(Q_{r,s}))$ le sous-ensemble de matrices associé au groupe orthogonal $O(Q_{r,s})$ de $Q_{r,s}$.

9. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire et $M = j(f)$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Démontrer que $M \in O_{r,s}$ si et seulement si ${}^t M I_{r,s} M = I_{r,s}$ où $I_{r,s}$ est la matrice $I_{r,s} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,s} \\ 0_{s,r} & -I_s \end{bmatrix}$, I_p désigne la matrice identité de taille $p \times p$ et $0_{p,q}$ la matrice nulle de taille $p \times q$ pour tous entiers p et q .

Que peut-on dire du déterminant $\det(M)$ de M si $M \in O_{r,s}$?

10. Démontrer que $O_{r,s}$ est un sous-groupe *fermé* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$, de sa topologie de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie).

11. On note $O(n)$ le groupe orthogonal usuel de $\mathbb{R}^n$ (qui s'identifie à $O_{n,0}$). On note $K_{r,s} := O_{r,s} \cap O(n)$.
Démontrer que $K_{r,s}$ est compact et en bijection avec $O(r) \times O(s)$.
12. Démontrer que $SO(2) = \{M \in O(2) \mid \det(M) = 1\}$ est connexe par arcs.
13. Soit $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$ un hyperboloïde à deux nappes.
 - (a) Démontrer que si $f \in O(Q_{2,1})$, alors $f(H) = H$.
 - (b) On note $SO_{2,1} := \{M \in O_{2,1} \mid \det(M) = 1\}$. Démontrer que $SO_{2,1}$ est un sous-groupe fermé de $O_{2,1}$.
14. Pour $f \in O(Q_{2,1})$, on note (x_f, y_f, z_f) le vecteur $f(0, 0, 1)$. On note également $SO_{2,1}^+ := \{M = j(f) \in SO_{2,1} \mid z_f > 0\}$.
 - (a) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application linéaire r_t dont la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) vaut $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch}(t) & \text{sh}(t) \\ 0 & \text{sh}(t) & \text{ch}(t) \end{bmatrix}$ est dans $SO_{2,1}^+$ (on pourra appeler par la suite une telle application linéaire une *rotation hyperbolique*).
 - (b) Soit $M = j(f)$. On suppose que $M \in SO_{2,1}^+$. Montrer qu'il existe une rotation (au sens usuel) ρ d'axe $(0, 0, 1)$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $r_t \circ \rho \circ f \in SO_{2,1}^+$ et vérifie $r_t \circ \rho \circ f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.
 - (c) Démontrer que $SO_{2,1}^+$ est connexe par arcs.
15. Dédurre de la question 14 que $O_{2,1}$ est la réunion de quatre sous-ensembles fermés disjoints deux à deux et connexes par arcs.
16. Démontrer qu'il existe un morphisme surjectif de groupes $\psi : O_{2,1} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont le noyau est $SO_{2,1}^+$.

Troisième partie

On revient dans cette dernière partie au cas où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque de caractéristique nulle.

Si V et V' sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $q' \in \mathcal{Q}(V')$ sont deux formes quadratiques non dégénérées, la *somme orthogonale* $q \perp q'$ de q et q' est la forme quadratique sur $V \times V'$ définie par

$$q \perp q'(x, x') = q(x) + q'(x')$$

pour tout $x \in V$ et tout $x' \in V'$.

17. Soient V, V' et V'' trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $(q, q', q'') \in \mathcal{Q}(V) \times \mathcal{Q}(V') \times \mathcal{Q}(V'')$.

(a) Montrer que $q \perp q' \in \mathcal{Q}(V \times V')$ puis que $(q \perp q') \perp q'' \cong q \perp (q' \perp q'')$.

(b) Montrer que si $q' \cong q''$ alors $q \perp q' \cong q \perp q''$.

(c) Démontrer que si $V = V' \oplus V''$ et $\tilde{q}(x, y) = 0$ pour tout $x \in V'$ et tout $y \in V''$, alors $q \cong q' \perp q''$ où q' est la restriction de q à V' et q'' celle de q à V'' .

18. Soient V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $v, w \in V$ deux vecteurs *distincts* de V tels que $q(v) = q(w) \neq 0$.

On veut montrer dans cette question qu'il existe alors une isométrie $h \in O(q)$ telle que $h(v) = w$.

(a) Soit $x \in V$ tel que $q(x) \neq 0$. On note s_x l'endomorphisme de V défini par $y \mapsto s_x(y) = y - 2\frac{\tilde{q}(x, y)}{q(x)}x$. Montrer que s_x et $-s_x$ appartiennent à $O(q)$.

(b) On suppose ici que $q(w - v) \neq 0$. Montrer que l'application s_{w-v} est une isométrie telle que $s_{w-v}(v) = w$.

(c) On suppose ici que $q(w - v) = 0$. Montrer qu'il existe une isométrie $g \in O(q)$ telle que $g(v) = w$ et conclure.

19. Soient $(V_i)_{1 \leq i \leq 3}$ trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $q_i \in \mathcal{Q}(V_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$ vérifiant $q_1 \perp q_3 \cong q_2 \perp q_3$. Montrer que $q_1 \cong q_2$.

Indication : on pourra raisonner par récurrence et utiliser les questions 17 et 18.

20. Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $q \in \mathcal{Q}(V)$. Montrer qu'il existe un unique entier m positif ou nul et une forme quadratique anisotrope q_{an} , *unique à isométrie près*, tels que $q \cong q_{an} \perp m \cdot h$ où $m \cdot h = h \perp \cdots \perp h$ est la somme orthogonale de m copies de h et h est la forme quadratique introduite par la question 6b.

Indication : on pourra utiliser la question 6b et la question précédente.

* *

*