ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2015 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – C – (ULCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices électroniques est interdite.

⋆ ⋆ ⋆

On définit, pour tout le problème, la fonction Gaussienne $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

I

1)
a. Pour $t > 0$ on pose

$$A(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\, dx\right)^2 \qquad B(t) = -\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx.$$

A l'aide du changement de variables $x = ty$, montrer que les fonctions A et B ont la même dérivée.

b. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\, dx = 1.$$

2) Etant donnée une fonction g bornée continue sur $\mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle ordinaire

$$\varphi'(x) - x\varphi(x) = g(x).$$

3) Etant donnée une fonction f bornée continue sur $\mathbb{R}$, et posant $\langle f \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\, dx$, montrer que la fonction donnée par

$$\varphi(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f \rangle)\, dy$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et est solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(x) - x\varphi(x) = f(x) - \langle f \rangle.$$

Montrer aussi que

$$\varphi(x) = -e^{x^2/2} \int_{x}^{+\infty} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f \rangle)\, dy.$$

4) Montrer que pour tous nombres réels x, y, on a

$$e^{-y^2/2} \leqslant e^{-x^2/2} e^{-x(y-x)}.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{C_0 \|f\|_\infty}{1 + |x|},$$

avec $C_0 \leqslant \max(4, 2\sqrt{2\pi e})$. Pour ce faire, on distinguera les cas $x \geqslant 1, x \leqslant -1, -1 \leqslant x \leqslant 1$. En déduire que φ' est bornée sur $\mathbb{R}$.

5) On suppose dans tout le reste de cette partie en outre que f est de classe C^1 avec f' bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer que

$$\varphi(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-s^2/2} e^{-sx} (f(x+s) - \langle f \rangle)\, ds.$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(1+|x|)|\varphi'(x)| \leqslant C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty),$$

où C est une constante indépendante de f. En définissant C_1 comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

6) Justifier que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\varphi''(x)| \leqslant C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty),$$

où C est une constante indépendante de f. En définissant C_2 comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

II

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles positives continues par morceaux.

1) En utilisant une intégration par parties que l'on justifiera, montrer que pour toute fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que φ et φ' soient bornées sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)(\varphi'(x) - x\varphi(x))\, dx = 0.$$

2) On suppose pour cette question que la suite (g_n) est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\, dx = 1$ et que pour toute fonction h de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que h et h' soient bornées, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\, dx = 0.$$

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour toute fonction f continue bornée, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) f(x)\, dx.$$

3) On suppose pour cette question que la suite (g_n) est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_n(x)\, dx$ est bornée indépendamment de n et que pour toute fonction f bornée de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) f(x)\, dx.$$

a. Justifier que si h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à support compact, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\, dx = 0.$$

b. On considère une famille $(\chi_R)_{R\in\mathbb{R}_+^*}$ de fonctions bornées indépendamment de R, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telles que χ_R vaut 1 sur $[-R, R]$ et 0 en dehors de $[-R-1, R+1]$. Montrer que si h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telle que h et h' soient bornées sur $\mathbb{R}$, étant donné $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe R tel que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \chi_R(x)) g_n(x)(h'(x) - xh(x))\, dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

c. Montrer que si h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, bornée et de dérivée bornée sur $\mathbb{R}$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe R tel que

$$\left| \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\chi_R(x)(h'(x) - xh(x))\,dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

d. Montrer que le même résultat est vrai si h est seulement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec toujours h bornée et de dérivée bornée.

e. Déduire des questions précédentes que si h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telle que h et h' soient bornées sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,dx = 0.$$

III

Dans toute cette partie et la suivante, on suppose que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, sur un espace de probabilité. On suppose que les X_i sont **indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1, et uniformément bornées en valeur absolue par une constante** M.
On pose, pour tout n, $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$. On notera P la probabilité et E l'espérance.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$, et $\langle f\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\,dx$. Soit φ définie à partir de f comme à la question I. 3).

1) Vérifier que

$$E\left(\varphi'(Z_n) - Z_n\varphi(Z_n)\right) = E(f(Z_n) - \langle f\rangle).$$

2) Pour i entier dans $[1, n]$, on définit $Z_{n,i} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_{i-1} + X_{i+1} + \cdots + X_n) = Z_n - \frac{1}{\sqrt{n}}X_i$. En utilisant les résultats de la partie I, montrer que

$$\left| X_i\varphi(Z_n) - X_i\varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i}) \right| \leqslant \frac{C_2}{2}\frac{|X_i|^3}{n}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

3) En déduire que

$$\left| E(Z_n\varphi(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\varphi'(Z_{n,i})) \right| \leqslant \frac{C_2 M}{2\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

4) En utilisant le même type d'arguments, montrer que

$$\left| E(\varphi'(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\varphi'(Z_{n,i})) \right| \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

5) Déduire de toutes les questions précédentes que

$$\left| E(f(Z_n)) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\,dx \right| \leqslant \frac{C_2(1 + \frac{1}{2}M)}{\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

6) Montrer que pour tout nombre réel a, on a

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a) = \int_{-\infty}^{a} G(x)\,dx$$

et montrer que la vitesse de convergence peut se majorer par un $O(n^{-1/4})$. On pourra par exemple encadrer la fonction indicatrice de l'intervalle $]-\infty, a]$ par des fonctions bien choisies.

IV

On garde les mêmes hypothèses qu'à la partie précédente, à savoir que (X_i) forme une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1, et uniformément bornées en valeur absolue par une constante M.

1)
a. En utilisant une propriété de convexité, montrer que pour tout $t \geq 0$ et tout i, on a

$$E(e^{tX_i}) \leqslant \frac{1}{2}(e^{tM} + e^{-tM}).$$

b. Montrer que pour $t \geqslant 0$ et $M \geq 0$, on a

$$\frac{1}{2}(e^{tM} + e^{-tM}) \leqslant e^{\frac{1}{2}t^2M^2}.$$

2) En déduire que pour tout $\delta > 0$,

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \delta\right) \leqslant e^{-\frac{n\delta^2}{2M^2}}.$$

3) Comparer ce résultat à celui de la question III. 6) : quelle est la meilleure estimation quand n tend vers l'infini (discuter selon les cas)?

4)
a. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Montrer que si $|X| \leq M$ on a $f(X) \leqslant f(M)$.

b. En utilisant les hypothèses sur X_i et l'inégalité $1 + x \leqslant e^x$, en déduire que pour tout $t \geqslant 0$ et tout i, on a

$$E(e^{tX_i}) \leqslant exp\left(\frac{1}{M^2}(e^{tM} - 1 - tM)\right).$$

En déduire l'amélioration suivante du résultat précédent:

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \delta\right) \leqslant e^{-\frac{n}{M^2}\Phi(M\delta)},$$

où $\Phi(x) = (1 + x)\log(1 + x) - x$.

⋆ ⋆
⋆