Composition de Mathématiques D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices est interdite

Sujet saisi par Michel Quercia (michel.quercia@prepas.org) d'après l'original.

Le problème est consacré à l'étude de la répartition de certains ensembles d'entiers dans les suites arithmétiques. Les deux premières parties sont consacrées à des ensembles arbitraires, et les deux suivantes à l'ensemble des nombres premiers.

Les parties I, II et III sont indépendantes. La partie IV utilise les résultats de la partie III.

Préambule

Le cardinal d'un ensemble fini X est noté $|X|$. Si E et F sont deux ensembles quelconques, on note $E \setminus F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F .

On dira qu'une suite finie $a_1, \dots, a_r$ d'entiers relatifs est en progression arithmétique si l'on peut trouver deux entiers a et b tels que $a_i = a + bi$ pour $i = 1, \dots, r$. L'entier b est alors la *raison* de cette progression arithmétique.

I

Si E et F sont deux ensembles finis, la *discrépance* de F par rapport à E est l'entier positif

$$\Delta(E, F) = ||F \cap E| - |E \setminus F||.$$

- 1) Soit X un ensemble fini de cardinal d . Soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X .
 - a) Calculer le cardinal de $\mathcal{P}(X)$.
 - b) Calculer en fonction de d les sommes $\sum_{k=0}^d k \binom{d}{k}$ et $\sum_{k=0}^d k(k-1) \binom{d}{k}$.
 - c) Calculer les sommes $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(X)} |Y|$ et $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(X)} |Y|^2$.
 - d) Montrer l'égalité $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(X)} \Delta(X, Y)^2 = d$.
- 2) Si N et q sont deux entiers strictement positifs, et si a est un entier relatif, on note $S_{q,a}(N)$ l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, N\}$ qui sont congrus à a modulo q . On note $\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(\{1, \dots, N\})$.
 - a) Montrer que pour tous entiers $1 \leq a \leq q \leq N$, le cardinal de $S_{q,a}(N)$ est strictement inférieur à $1 + N/q$.
 - b) Montrer que pour tous entiers $1 \leq t \leq N$, on a

$$\frac{1}{|\mathcal{P}(N)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(N)} \sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 \leq 2Nt.$$

- 3) Dédurre de la question précédente qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier N strictement positif, il existe un sous-ensemble Y de $\{1, \dots, N\}$ vérifiant, pour tout q compris entre 1 et N et tout a entre 1 et q , l'inégalité $\Delta(S_{q,a}(N, Y)) \leq CN^{2/3}$. On pourra pour cela choisir judicieusement la valeur de t dans l'inégalité ci-dessus.

II

Dans cette partie, on note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont nulles en dehors d'un ensemble fini. Si c est un élément de $\mathcal{E}$, on note $\widehat{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n)e^{2i\pi nx}$. On pourra remarquer que, par définition de l'espace $\mathcal{E}$, le membre de droite de l'expression ci-dessus est une somme finie.

- 1) a) Soit $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ un élément de $\mathcal{E}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, montrer les égalités

$$\int_{x=0}^1 \widehat{c}(x)e^{-2i\pi nx} dx = c(n) \text{ et } \int_{x=0}^1 |\widehat{c}(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c(n)|^2.$$

- b) Soient c et d deux éléments de $\mathcal{E}$. On définit leur produit de convolution $c * d : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule

$$(c * d)(n) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2, p+q=n} c(p)d(q).$$

Montrer que $c * d$ est bien défini et appartient à $\mathcal{E}$.

- c) Avec les notations de la question précédente, montrer l'égalité $\widehat{c * d} = \widehat{c}\widehat{d}$.

Dans ce qui suit, soit N un entier strictement positif et soit Y un sous-ensemble de $\{1, \dots, N\}$ de cardinal r . On note $\eta = r/N$ et $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $\chi(k) = 1 - \eta$ si $k \in Y$, $\chi(k) = -\eta$ si $k \in \{1, \dots, N\} \setminus Y$ et $\chi(k) = 0$ sinon.

- 2) Montrer l'égalité $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) = 0$.
 3) Si E est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, on note $V(E)$ la quantité $|E \cap Y| - \eta|E \cap \{1, \dots, N\}|$. Soit c_{-E} la fonction caractéristique de $-E$, qui vaut 1 en n si $-n \in E$, et 0 sinon. Montrer l'égalité $V(E) = (\chi * c_{-E})(0)$.

Soit s un entier positif inférieur ou égal à N . On s'autorisera plus tard à choisir s de manière adaptée en fonction de N .

- 4) Soit q un entier strictement positif. On note c_q la fonction caractéristique de l'ensemble

$$E_q = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tq } q \text{ divise } n \text{ et } |n| \leq sq\}.$$

- a) Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels. Montrer qu'il existe deux entiers distincts $i, j \in \{1, \dots, n\}$, et un entier relatif $h \in \mathbb{Z}$, tels que $|\alpha_i - \alpha_j - h| \leq 1/n$.
 b) Soit α un nombre réel, et soit Q un nombre entier strictement positif. Montrer qu'il existe un entier $q \in \{1, \dots, Q\}$ et un entier h tels que $|q\alpha - h| \leq 1/Q$.
 c) Soit α un nombre réel. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de N et s , et un entier $q \leq 8s$ tel que $|\widehat{c}_q(\alpha)| \geq Ks$.
 5) Soit p un entier. On note $E_{q,p} = p + E_q = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tq } n - p \in E_q\}$.
 a) En utilisant la question II-1a, montrer l'inégalité

$$\sum_{1 \leq q \leq 8s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} V(E_{q,p})^2 \geq K^2 \eta(1 - \eta) N s^2.$$

- b) En choisissant judicieusement s , montrer que l'on peut trouver une constante $K' > 0$ indépendante de N et de Y , et un sous-ensemble Z d'éléments de $\{1, \dots, N\}$ en progression arithmétique tels que

$$||Y \cap Z| - \eta|Z|| \geq K' \sqrt{\eta(1 - \eta)} N^{1/4}.$$

III

1) Soit $\omega : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\omega(u) = 1/u$ si $1 \leq u \leq 2$ et

$$\omega(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \int_{t=1}^{u-1} \omega(t) dt$$

pour $u > 2$.

- a) Montrer que la formule ci-dessus définit bien une fonction continue sur $[1, \infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]2, \infty[$.
- b) Montrer que pour tout réel $u \geq 1$, on a $1/u \leq \omega(u) \leq 1$.
- c) Montrer que $u\omega'(u) = -\int_{t=u-1}^u \omega'(t) dt$ pour tout réel $u > 3$.
- d) Montrer que pour tout entier $k > 0$, on a $\lim_{u \rightarrow \infty} u^k \omega'(u) = 0$.
- e) Montrer que ω admet une limite finie en $+\infty$. Dans la suite du problème, on notera L cette limite.
- f) Soit $\tilde{\omega}$ la fonction $u \mapsto \omega(u) - L$. Montrer l'égalité

$$\forall u > 3, u\tilde{\omega}(u) = -\int_{t=u-1}^{\infty} \tilde{\omega}(t) dt.$$

g) Montrer que pour tout réel $C \geq 1$, il existe deux nombres réels $u, v > C$ tels que $\omega(u) < L < \omega(v)$.

Dans la suite du problème, si x est un nombre réel strictement positif, on notera $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x . On admettra le théorème suivant, dit *théorème des nombres premiers*.

Théorème III.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall x > 1, \left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x} \right| \leq C \frac{x}{(\ln x)^2}.$$

Dans la suite on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

2) Montrer l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour tous réels $1 < a \leq b$, on ait

$$\left| \pi(b) - \pi(a) - \sum_{a \leq n \leq b} \frac{1}{\ln n} \right| \leq K \frac{b}{(\ln b)^2}.$$

3) Soit $f :]1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ une fonction, et soient $1 < a \leq b$ deux nombres réels. Soit a^- le plus grand entier strictement inférieur à a , et soit b^0 le plus grand entier inférieur ou égal à b , c'est-à-dire la partie entière de b .

a) Montrer l'égalité

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} f(p) = \sum_{a \leq n \leq b} \pi(n)(f(n) - f(n+1)) - \pi(a^-)f(1+a^-) + \pi(b^0)f(1+b^0).$$

b) Montrer l'égalité

$$\sum_{a \leq n \leq b} \frac{f(n)}{\ln n} = \sum_{a \leq n \leq b} \psi(n)(f(n) - f(n+1)) - \pi(a^-)f(1+a^-) + \psi(b^0)f(1+b^0),$$

où l'on définit, pour tout réel x entre a et b , $\psi(x) = \pi(a^-) + \sum_{a \leq k \leq x} 1/\ln(k)$.

c) En déduire l'inégalité

$$\left| \sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} f(p) - \sum_{a \leq n \leq b} \frac{f(n)}{\ln n} \right| \leq K \frac{bf(1+b^0)}{(\ln b)^2} + K \sum_{a \leq n \leq b} \frac{n}{(\ln n)^2} |f(n+1) - f(n)|,$$

où K est la constante introduite dans la question 2.

- d) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} 1/(n(\ln n)^k)$ converge et que pour tout réel $a > 1$, on a

$$\sum_{n \geq a} \frac{1}{n(\ln n)^k} \leq \frac{1}{(k-1)(\ln a)^{k-1}} + \frac{1}{a(\ln a)^k}.$$

- e) En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe une constante $K' > 0$ telle que pour tous réels $1 < a \leq b$, on ait

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} \frac{1}{p(\ln p)^2} \leq \frac{1}{2(\ln a)^2} + \frac{K'}{(\ln a)^3}.$$

- 4) Montrer l'existence d'une constante $K'' > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$, on ait

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{(\ln n)^2} \leq K'' \frac{x}{(\ln x)^2}.$$

Si x et y sont deux réels strictement positifs, on notera $\Phi(x, y)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et x au sens large dont tous les facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à y . Par convention, pour tout réel $y > 0$, on pose $\Phi(1, y) = 1$.

- 5) Pour tous réels $1 < y < x$ tels que $\sqrt{x} < y$, montrer l'inégalité $|\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| \leq 1$ et en déduire qu'il existe une constante $D_1 > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$ et tout réel y satisfaisant $\sqrt{x} \leq y < x$, on ait

$$\left| \Phi(x, y) - \frac{x}{\ln x} \right| \leq D_1 \left(\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{y}{\ln y} \right).$$

- 6) Soient x et y deux réels strictement positifs. Pour tout $y' \geq y$, montrer l'égalité

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y') + \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < y'} \Phi\left(\frac{x}{p}, p\right).$$

- 7) a) Pour tout réel $x > 1$ et tout réel y satisfaisant $x^{1/3} \leq y < x^{1/2}$, montrer l'égalité

$$1 + \int_{t=y}^{\sqrt{x}} \frac{(\ln x) dt}{t(\ln t)^2((\ln x)/(\ln t) - 1)} = \frac{\ln x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right).$$

- b) Montrer l'existence d'une constante $D_2 > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$ et tout réel y satisfaisant $x^{1/3} \leq y < x^{1/2}$, on ait

$$\left| \Phi(x, y) - \frac{x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) \right| \leq D_2 \frac{x}{(\ln y)^2}.$$

On appliquera la question III-6 avec $y' = \sqrt{x}$.

- c) Montrer l'existence d'une constante $D > 0$ telle que pour tous réels $1 < y < \sqrt{x}$, on ait

$$\left| \Phi(x, y) - \frac{x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) \right| \leq D \frac{x}{(\ln y)^2}.$$

On pourra pour cela raisonner par récurrence sur l'unique entier $n \geq 2$ tel que $x^{1/(n+1)} \leq y < x^{1/n}$.

IV

Dans cette partie, si q est un entier strictement supérieur à 1, on note $\varphi(q)$ le nombre d'entiers $n \in \{1, \dots, q\}$ qui sont premiers à q .

- 1) a) Soit $y > 2$ un nombre réel. On note $q(y)$ le produit des nombres premiers strictement inférieurs à y . Montrer que, quand x tend vers $+\infty$, on a

$$\Phi(x, y) \sim x \frac{\varphi(q(y))}{q(y)}.$$

- b) En utilisant la partie précédente, en déduire

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\varphi(q(y))}{q(y)} \ln(y) = L$$

où L est le nombre réel défini dans la question III-1e.

- c) En utilisant les questions 3 et 4 de la partie précédente, montrer par ailleurs que quand y tend vers $+\infty$, on a

$$\ln(q(y)) \sim y.$$

- 2) Soit $y > 2$ un nombre réel. Afin d'alléger les notations, on notera $q = q(y)$. Soient m et n deux entiers strictement positifs. On considère la matrice rectangulaire $M(m, n, q)$ de taille $n \times m$ dont le coefficient d'indice (i, j) est

$$M(m, n, q)_{ij} = i + (m + j)q$$

pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, et l'on suppose $n < q$.

- a) Montrer que le nombre de lignes de $M(m, n, q)$ contenant au moins un nombre premier est inférieur ou égal à $\Phi(n, y)$.
 b) Soit N le nombre de nombres premiers apparaissant comme coefficients de la matrice $M(m, n, q)$. Montrer l'égalité

$$N = \sum_{1 \leq j \leq m} (\pi(n + (m + j)q) - \pi((m + j)q)).$$

- c) On note $M_s = N/m$ et $M_a = N/\Phi(n, y)$. En supposant $N > 0$, montrer l'égalité

$$M_s \left(\frac{n}{\ln(mq)} \right)^{-1} \times M_a^{-1} \frac{mq}{\varphi(q) \ln(mq)} = \frac{\Phi(n, y)}{n} \times \frac{q}{\varphi(q)}.$$

- 3) En appliquant les résultats ci-dessus à des valeurs de m et n bien choisies en fonction de y , montrer que l'un des deux énoncés suivants est vrai :

– Soit α_0 un nombre réel. On peut trouver un nombre réel $\alpha > \alpha_0$, une constante $\lambda > 1$ et une infinité d'entiers $x > 1$ tels que

$$(\ln x)(\pi(x + (\ln x)^\alpha) - \pi(x)) > \lambda(\ln x)^\alpha.$$

– Soit $\beta_0 > 0$ un nombre réel. On peut trouver un nombre entier $\beta > \beta_0$, une constante $\lambda > 1$ et une infinité d'entiers $q > 1$ tels qu'il existe une suite d'entiers $a_1, \dots, a_{q^\beta}$ premiers à q , en progression arithmétique de raison q , avec $q^\beta < a_1 < 2q^{\beta+1}$, pour laquelle le nombre de nombres premiers parmi les a_i soit strictement inférieur à

$$\lambda^{-1} \frac{q^\beta}{\ln(q^\beta) \varphi(q)}.$$

On commencera par estimer le membre de droite dans l'égalité de la question précédente, et on appliquera la question 1g de la partie III.

* *
*