

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

★ ★ ★

Pour tous entiers $l, m \in \mathbb{N}^*$, on notera $\mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant l lignes et m colonnes. Lorsque $l = m$, on notera $\mathcal{M}_l(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $l \times l$. Par ailleurs :

- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$, on notera A^T la transposée de A .
- On notera $O_{l,m}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls. Lorsque $l = m$, O_l désignera la matrice nulle et I_l la matrice identité de $\mathcal{M}_l(\mathbb{R})$.
- Pour toute famille $(a_i)_{1 \leq i \leq l}$ de réels, on notera $\text{diag}(a_1, \dots, a_l)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_l(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $a_1, a_2, \dots, a_l$.
- Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$, on notera $\langle A, B \rangle_F = \text{tr}(A^T B)$ où $\text{tr}(M)$ désigne la trace de M pour toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle_F}$. On pourra utiliser sans démonstration que $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_F$ est un espace vectoriel normé de dimension lm .
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$, on notera $\text{rg}(A)$ le rang de la matrice A c'est-à-dire la dimension de l'image de A . On rappelle que $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{M}_{l,m}^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ telles que $\text{rg}(A) = k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique et pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$, on notera $\|x\|_2$ la norme euclidienne de x .

Préliminaire

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ trois entiers strictement positifs. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

1. Donner l'expression de $\langle A, B \rangle_F$ en fonction des coefficients de A et B .
2. Soit $u \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\|Au\|_2 \leq \|A\|_F \|u\|_2$.
3. Montrer que $\|AC\|_F \leq \|A\|_F \|C\|_F$.

Première partie

On considère trois entiers n, p et k strictement positifs tels que $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ soit non vide. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $k \leq \min(n, p)$ et que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$.
5. Soient $S = AA^T$ et $\tilde{S} = A^T A$.
 - (a) Vérifier que S est une matrice symétrique qui n'admet que des valeurs propres positives puis montrer que $\text{Im}(A) = \text{Im}(S)$.
 - (b) Soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de S pour une valeur propre $\lambda > 0$ et soit $v = A^T u / \sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}^p$. Montrer que v est un vecteur propre de $\tilde{S}$ pour la valeur propre λ et $\|v\|_2 = \|u\|_2$.
6.
 - (a) Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telles que $S = U\Lambda U^T$ avec $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ et $U^T U = I_k$.
 - (b) Montrer que $\text{Im}(S) = \text{Im}(U)$ et que UU^T est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im}(U)$ dans $\mathbb{R}^n$.
 - (c) En posant $V = A^T U D \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ où $D = \text{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_k}) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, montrer que $V^T V = I_k$ et $\tilde{S} = V\Lambda V^T$.
7. En déduire que

$$A = U\Sigma V^T,$$

avec $\Sigma = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k})$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on s'intéresse à la meilleure approximation, pour la norme $\|\cdot\|_F$, d'une matrice de rang k par une matrice de rang fixé. Cette partie est indépendante des parties suivantes.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ une matrice de rang k où n, p et k sont des entiers strictement positifs, $k \leq \min(n, p)$. On considère la décomposition $A = U\Sigma V^T$ construite dans la première partie. Soient $l \in \mathbb{N}^*$ et $\tilde{V} \in \mathcal{M}_{p,l}(\mathbb{R})$ tels que $l < k$ et $\tilde{V}^T \tilde{V} = I_l$. On note $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_l) \in (\mathbb{R}^p)^l$ la famille des colonnes de $\tilde{V}$ et $(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^p)^k$ celle des colonnes de V .

8. (a) Vérifier que $\|A - A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \|A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2$.

(b) Montrer que

$$\|A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 = \sum_{h=1}^k \left(\lambda_h \sum_{m=1}^l \langle v_h, \tilde{v}_m \rangle_2^2 \right)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$.

9. On suppose ici que $\lambda_l > \lambda_{l+1}$.

(a) Pour tout $l+1 \leq i \leq k$ et tout $1 \leq j \leq l$, on pose $a_i = \sum_{m=1}^l \langle v_i, \tilde{v}_m \rangle_2^2$ et $b_j = 1 - \sum_{m=1}^l \langle v_j, \tilde{v}_m \rangle_2^2$.

Montrer que les (a_i) et (b_j) sont des réels positifs et que l'on a $\sum_{i=l+1}^k a_i \leq \sum_{j=1}^l b_j$.

(b) Montrer que $\|A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 \leq \sum_{h=1}^l \lambda_h$ et que l'on a l'égalité si et seulement si on a $\text{Vect}(\{v_1, \dots, v_l\}) = \text{Im}(\tilde{V})$ où $\text{Vect}(X)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par $X \subset \mathbb{R}^p$.

(c) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}^l(\mathbb{R})$. Montrer que $\|M - A\|_F^2 \geq \sum_{h=l+1}^k \lambda_h$ avec égalité si et seulement si $M = U_* \Sigma_* V_*^T$ où $\Sigma_* = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_l})$, U_* (resp. V_*) est la matrice formée des l premières colonnes de U (resp. de V).

Troisième partie

Soient p, k deux entiers strictement positifs et $V \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ tel que $V^T V = I_k$. Pour tout $W \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$, on note $M_{V,W}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p+k}(\mathbb{R})$ définie par blocs par

$$M_{V,W} = \begin{pmatrix} V & I_p \\ O_k & W^T \end{pmatrix}.$$

10. On suppose ici que $W^T V$ est une matrice inversible.

(a) Montrer que $M_{V,W}$ est inversible. On notera son inverse $M_{V,W}^{-1}$.

(b) Montrer que l'orthogonal $\text{Im}(W)^\perp$ de $\text{Im}(W)$ et $\text{Im}(V)$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^p$ i.e. $\text{Im}(W)^\perp \oplus \text{Im}(V) = \mathbb{R}^p$.

Indication : On pourra commencer par vérifier que pour $z \in \mathbb{R}^p$, si $z \in \text{Im}(W)^\perp$ alors $W^T z = 0$.

(c) On définit la matrice

$$P_{V,W} = (V \ O_p) M_{V,W}^{-1} \begin{pmatrix} I_p \\ O_{k,p} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $P_{V,W}$ est la matrice de la projection sur $\text{Im}(V)$ parallèlement à $\text{Im}(W)^\perp$.

11. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ est un ouvert et que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur cet ouvert.

12. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de V dans $\mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ tel que $W^T V$ est inversible pour tout $W \in \mathcal{V}$ et l'application $W \mapsto P_{V,W}$ est continue de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Quatrième partie

Soient n, p et k trois entiers strictement positifs tels que $k \leq \min(n, p)$. On définit pour toute la suite l'espace vectoriel

$$\mathcal{E} = \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}).$$

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ une matrice de rang k et $(U, \Sigma, V) \in \mathcal{E}$ tels que

$$A = U \Sigma V^T, \quad U^T U = V^T V = I_k$$

et Σ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs (l'existence de (U, Σ, V) a été montrée dans la première partie).

13. Soient $(\bar{U}, \bar{\Sigma}, \bar{V}) \in \mathcal{E}$. On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par $\gamma(t) = (U + t\bar{U})(\Sigma + t\bar{\Sigma})(V + t\bar{V})^T$.
- (a) Montrer que les fonctions $t \mapsto \text{rg}(U + t\bar{U})$, $t \mapsto \text{rg}(\Sigma + t\bar{\Sigma})$ et $t \mapsto \text{rg}(V + t\bar{V})$ sont constantes au voisinage de $t = 0$.
 - (b) En déduire que $\gamma(t) \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ au voisinage de $t = 0$.
 - (c) Montrer que γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de la dérivée $\gamma'(0)$ de γ en 0.
14. On note $T_A = \{\bar{U}\Sigma V^T + U\bar{\Sigma}V^T + U\Sigma\bar{V}^T \mid (\bar{U}, \bar{\Sigma}, \bar{V}) \in \mathcal{E}, \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = O_k\}$.
- (a) Vérifier que tous les éléments de T_A sont des vecteurs tangents à $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ en A et que T_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.
 - (b) Soit $N_A = \{\bar{N} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid \bar{N}^T U = O_{p,k}, \bar{N} V = O_{n,k}\}$. Montrer que N_A est le sous-espace orthogonal à T_A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$.
15. Soit $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que $\tilde{A}$ vérifie la condition (C) si
- $$(C) \quad \text{Im}(\tilde{A}V V^T) = \text{Im}(\tilde{A}) \text{ et } \text{Im}(\tilde{A}^T U U^T) = \text{Im}(\tilde{A}^T).$$
- (a) Montrer que si $\tilde{A}$ vérifie la condition (C) alors $\text{rg}(\tilde{A}) \leq k$ et
- $$\text{Im}(\tilde{A}^T U U^T)^\perp = \ker(\tilde{A}).$$
- (b) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$, la matrice $\tilde{A}$ vérifie la condition (C) dès que $\|\tilde{A} - A\|_F \leq \epsilon$.
16. Soit $\phi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par $\phi(\tilde{A}) = (\tilde{A}V V^T, \tilde{A}^T U U^T)$ pour tout $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- (a) Identifier $\ker(\phi)$ en fonction de N_A introduit à la question (14b).
 - (b) On note $\pi_A : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la projection orthogonale sur T_A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\phi = \phi \circ \pi_A$.
 - (c) Soit $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ vérifiant la condition (C). On note $W = \tilde{A}^T U U^T$. Montrer que si $P_{V,W}$ est la matrice de la projection sur $\text{Im}(V)$ parallèlement à $\text{Im}(W)^\perp$ alors
- $$\tilde{A} = \tilde{A}V V^T P_{V,W}.$$
17. En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la restriction de π_A à $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R}) \cap B(A, \epsilon)$ est injective où $B(A, \epsilon) = \{\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid \|\tilde{A} - A\|_F < \epsilon\}$ est la boule ouverte de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ centrée en A et de rayon ϵ .

18. Soit ρ_A la projection orthogonale sur N_A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer pour tout $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $\rho_A(\tilde{A}) = (I_n - UU^T)\tilde{A}(I_p - VV^T)$.

(b) Montrer que $\rho_A(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Soit $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ vérifiant la condition (C).

(c) Montrer que si $W = \tilde{A}^T U U^T$

$$\rho_A(\tilde{A}) = (I_n - UU^T)(\tilde{A} - A)VV^T(P_{V,W} - P_{V,V})(I_p - VV^T).$$

(d) En déduire que $\|\rho_A(\tilde{A})\|_F \leq \sqrt{(n-k)k(p-k)} \|\tilde{A} - A\|_F \|P_{V,W} - P_{V,V}\|_F$.

19. Montrer que T_A est exactement l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ en A .