

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Étude de quelques courbes planes

Première partie

On note F l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, périodiques de période 2π , et E le sous-espace vectoriel de F constitué des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, périodiques de période 2π et de classe C^2 . Pour f et g dans F on définit le produit scalaire

$$(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx .$$

Si H est un sous-espace vectoriel de F , on note

$$H^\perp = \{f \in F / (f | h) = 0, \forall h \in H\} .$$

1. Exprimer, pour $f \in E$, la série de Fourier de f'' en fonction de celle de f . En quel sens la série de Fourier de f converge-t-elle ?

Soit $P : E \rightarrow F$ l'application linéaire définie par

$$P(f) = f + f'' .$$

2. Déterminer le noyau de P , que l'on note $\text{Ker } P$.

3.a) Déterminer $E^\perp$.

3.b) Pour f et g dans E , montrer l'égalité

$$(P(f) | g) = (f | P(g)) .$$

3.c) En déduire que $\text{Ker } P = (\text{Im } P)^\perp \cap E$, où $\text{Im } P$ désigne l'image de P .

4. On considère le sous-espace vectoriel de F ,

$$G = \{f \in F / f(x + \pi) + f(x) = f(\pi) + f(0), \forall x \in \mathbf{R}\} .$$

Montrer que f appartient à G si et seulement si les coefficients de Fourier de f satisfont certaines conditions que l'on explicitera.

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie certaines courbes du plan euclidien $\mathbf{R}^2$. On note O l'origine et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique. Soit $t \in \mathbf{R}$. On note

$$\vec{u}_t = \cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v}_t = \vec{u}_{t+\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f \in E$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- i) $f(t) > 0, \forall t \in \mathbf{R}$,
- ii) $f(t) + f''(t) > 0, \forall t \in \mathbf{R}$.

Pour toute fonction f de E satisfaisant i) et ii) et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{u}_t + f'(t)\vec{v}_t,$$

et l'on considère la courbe décrite par le point $M(t)$,

$$\Gamma_f = \{M(t) \in \mathbf{R}^2 / t \in [0, 2\pi]\}.$$

5.a) Quelle est la courbe Γ_f si f est la fonction constante égale à 1 ?

5.b) Montrer que la courbe Γ_f admet en tout point $M(t)$ une tangente dont on déterminera l'équation cartésienne.

5.c) Quelle est la distance de cette tangente à l'origine ?

6. Soient a et b des nombres réels non nuls. On pose $f(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$. On admettra que f satisfait i) et ii). Montrer que la courbe Γ_f est une ellipse centrée à l'origine.

On revient au cas général.

7.a) Montrer que

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sqrt{f(t)^2 + f'(t)^2} \left[\cos \left(t + \operatorname{Arctan} \frac{f'(t)}{f(t)} \right) \vec{e}_1 + \sin \left(t + \operatorname{Arctan} \frac{f'(t)}{f(t)} \right) \vec{e}_2 \right].$$

7.b) En déduire que toute demi-droite d'origine O contient un point et un seul de la courbe Γ_f .

8. Exprimer la longueur $L(f)$ de la courbe Γ_f en fonction de la valeur moyenne de f sur $[0, 2\pi]$.

On note $\Omega(f)$ la réunion des segments $OM(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

9.a) Montrer que l'aire $A(f)$ du domaine $\Omega(f)$ est égale à $\pi(P(f) | f)$.

9.b) Exprimer cette aire en fonction des coefficients de Fourier de f .

10. Pour $c \geq 0$, on note E_c le sous-ensemble de E constitué des fonctions f qui satisfont

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = c.$$

Montrer que la fonction $f \mapsto (P(f) \mid f)$ de E_c dans $\mathbf{R}$ admet un unique maximum que l'on déterminera.

Pour quelles fonctions de E_c ce maximum est-il atteint ?

11. En déduire, pour $f \in E$ satisfaisant les conditions i) et ii), l'inégalité

$$A(f) \leq \frac{(L(f))^2}{4\pi}.$$

Quelles sont les fonctions f qui réalisent l'égalité et les courbes Γ_f correspondantes ?

12. Soient $f \in E$ et $h \in \text{Ker } P$. On suppose que les fonctions f et $f+h$ vérifient les conditions i) et ii).

12.a) Comparer $L(f)$ et $L(f+h)$, puis $A(f)$ et $A(f+h)$.

12.b) Comparer les courbes Γ_f et Γ_{f+h} .

13. Soit r un réel positif.

13.a) Comparer $L(f)$ et $L(f+r)$.

13.b) Montrer la formule

$$A(f+r) = A(f) + L(f)r + \pi r^2.$$

14. Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et D_θ la droite engendrée par le vecteur $\vec{u}_\theta$.

14.a) Montrer que la projection orthogonale de Γ_f sur D_θ est un intervalle dont on déterminera la longueur $\ell(\theta)$. C'est le *diamètre apparent* de la courbe dans la direction normale à D_θ .

14.b) Caractériser les fonctions f pour lesquelles le diamètre apparent de la courbe Γ_f est indépendant de θ .

14.c) Exprimer alors $L(f)$ en fonction de ℓ . Donner un exemple qui ne soit pas un cercle.

15. On revient au cas général. Soient M_1 et M_2 deux points de la courbe Γ_f . Montrer que le segment M_1M_2 est inclus dans $\Omega(f)$.

* *
*