

ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES  
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2012

FILIÈRE PC

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

Ce sujet porte sur l'étude qualitative des solutions des systèmes d'équations différentielles autonomes  $y' = f(y)$  avec  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On s'intéressera en particulier au comportement asymptotique de ces solutions.

**Notations, définition, rappel**

Dans tout le sujet,  $\mathbb{R}^n$  est muni de son produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme euclidienne associée, notée  $\| \cdot \|$ , c'est-à-dire que pour

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ et } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

L'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  est noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . L'ensemble des matrices inversibles de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  est noté  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ . L'ensemble des matrices orthogonales de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  est noté  $O_n(\mathbb{R})$ . La matrice identité de taille  $n$  est notée  $I_n$ .

L'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  sera noté  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ .

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  deux fonctions. On note  $f = o_{+\infty}(\varphi)$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in [M, +\infty[ \quad |f(x)| \leq \varepsilon \varphi(x).$$

Les lettres  $I$  et  $J$  désigneront toujours un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Définition** (Solution maximale). Soit  $I \neq \emptyset$ . Une solution  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de

$$(E) \quad y' = f(y)$$

est une solution maximale si  $y$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et si pour toute autre fonction de classe  $\mathcal{C}^1$   $z : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  solution de (E) avec  $z = y$  sur  $I \cap J \neq \emptyset$  on a  $J \subset I$ .

On pourra utiliser le résultat suivant que l'on ne demande pas de démontrer :

**Théorème 1.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

et cette solution maximale est définie sur un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  qui contient  $t_0$ . Si  $f(y)$  est linéaire en  $y$ , alors la solution maximale est définie sur  $\mathbb{R}$ .

### Préliminaire

Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

1. Montrer que  $\| \cdot \|$  définit une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

### Première partie : un exemple en dimension 1

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(P) \quad \begin{cases} y' = ay \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

3. Montrer que (P) admet une unique solution maximale  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
4. Soit  $y_0 \in ]0, b[$ .

a) Montrer que pour tout  $t \in I$ ,  $y(t) \in ]0, b[$ .

b) Montrer que pour tout  $t \in I$ , on a

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{u \left(1 - \frac{u}{b}\right)} = at.$$

c) En déduire que  $I = \mathbb{R}$  et donner  $y(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$  en fonction de  $y_0$ ,  $a$  et  $b$ .

d) Donner les limites de  $y(t)$  pour  $t \rightarrow +\infty$  et pour  $t \rightarrow -\infty$ .

## Deuxième partie : le cas linéaire

Dans cette partie, on étudie le problème

$$(L) \quad \begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ .

On définit  $\varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  par  $\varphi_A(t; Y_0) = Y(t)$  où  $Y$  est la solution maximale de (L).

**5.** Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Y_0 \mapsto \varphi_A(t; Y_0)$  est linéaire injective. En déduire qu'il existe  $e_A : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $(t, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_A(t; Y_0) = e_A(t)Y_0$ .

**6.a)** Montrer que  $e_A$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e'_A(t) = Ae_A(t)$ .

*b)* Montrer que  $e_A(0) = I_n$  et que pour tout  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ ,  $e_A(t+s) = e_A(t)e_A(s) = e_A(s)e_A(t)$ .

*c)* Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e_A(-t) = e_A(t)^{-1}$ .

**7.a)** Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $e_{P^{-1}AP}(t) = P^{-1}e_A(t)P$ .

*b)* Montrer que si  $A$  est une matrice diagonale dont les coefficients sont notés  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  alors  $e_A(t)$  est une matrice diagonale dont les coefficients sont  $e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}$ .

*c)* Dans le cas où  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , calculer  $e_A(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**8.a)** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  des constantes positives dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\phi : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui vérifie

$$\forall t \in [0, +\infty[ \quad \phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(s) ds.$$

Montrer que pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , on a  $\phi(t) \leq \alpha e^{\beta t}$ .

*Indication :* On pourra étudier la fonction  $F(t) = (\alpha + \beta \int_0^t \phi(s) ds) e^{-\beta t}$ .

*b)* Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|e_A(t)\| \leq e^{\|A\||t|}$ .

**9.** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $Z_0 \in \mathbb{R}^n$ . On considère le problème de Cauchy

$$(U) \quad \begin{cases} Z'(t) = AZ(t) + g(t), \\ Z(0) = Z_0. \end{cases}$$

*a)* Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$Z(t) = e_A(t) \left( Z_0 + \int_0^t e_A(-s)g(s)ds \right)$$

est bien défini et solution du problème (U).

b) Montrer que si  $\tilde{Z} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une solution de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $(U)$  sur un intervalle ouvert contenant 0, alors  $\tilde{Z}(t) = Z(t)$  pour tout  $t \in I$ .

10.a) Soit  $a > 0$ . Soit  $\lambda \in ]-\infty, -a[$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $g(t) = o_{+\infty}(e^{-at})$ . Soit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifie  $y' = \lambda y + g$ . Montrer que  $y(t) = o_{+\infty}(e^{-at})$ .

b) On suppose dans cette question que  $A$  est une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On suppose qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\lambda_i < -a$ . Montrer que  $\|Y(t)\| = o_{+\infty}(e^{-at})$  où  $Y$  est la solution maximale du problème  $(L)$ .

c) On suppose ici que le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ . On suppose de plus que toutes les valeurs propres de  $A$  sont strictement négatives. Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que  $\|e_A(t)\| = o_{+\infty}(e^{-at})$ .

11. On suppose que  $A$  est dans  $O_n(\mathbb{R})$  et que  $A^2 + I_n = 0$ .

a) Donner les valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$  et montrer que  $n$  est pair.

b) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|e_A(t)\| = 1$ .

### Troisième partie : linéarisation

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Dans cette partie, on s'intéresse à la solution de

$$(S) \begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

pour  $Y_0 \in \mathbb{R}^2$ .

12. Soit  $Y : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  une solution de  $(S)$ . On suppose que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = l \in \mathbb{R}^2$  existe. On souhaite montrer que  $f(l) = 0$ . On suppose donc par l'absurde  $f(l) \neq 0$ .

a) Montrer qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$\forall t \in [M, +\infty[ \quad \langle Y'(t), f(l) \rangle \geq \frac{1}{2} \|f(l)\|^2.$$

b) Montrer que

$$\forall t \in [M, +\infty[ \quad \langle Y(t), f(l) \rangle \geq (t - M) \frac{\|f(l)\|^2}{2} + \langle Y(M), f(l) \rangle.$$

c) En conclure que  $f(l) = 0$ .

13. Dans cette question, on suppose que

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} z + \alpha y(y^2 + z^2) \\ -y + \alpha z(y^2 + z^2) \end{pmatrix} \end{array}$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Soit  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  la solution maximale de  $(S)$ .

a) Si  $\alpha = 0$ , montrer que  $I = \mathbb{R}$  et identifier la solution maximale. Quelle est la nature de la courbe  $t \mapsto Y(t)$  ?

b) On admet dans cette question que  $[0, +\infty[ \subset I$  lorsque  $\alpha < 0$ . Montrer que pour  $\alpha < 0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$ .

*Indication :* On pourra étudier la fonction  $t \mapsto \|Y(t)\|^2$ .

c) On suppose  $Y_0 \neq 0$ ,  $\alpha > 0$  et on pose  $T = \frac{1}{2\alpha\|Y_0\|^2}$ . Montrer que, si  $Y$  est définie sur  $[0, T[$ , alors  $\lim_{t \rightarrow T} \|Y(t)\| = +\infty$ . En déduire  $I \subset ]-\infty, T[$ .

**14.** Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dont le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{R}$ , dont toutes les valeurs propres sont strictement négatives et telle que  $\|f(x) - Ax\| = o(\|x\|)$  quand  $x \rightarrow 0$ .

a) Montrer que  $A$  est la matrice jacobienne de  $f$  en 0.

b) Soit  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  la solution maximale de  $(S)$ . On supposera que  $[0, +\infty[ \subset I$ . Montrer qu'il existe  $a > 0$  et  $K \geq 0$  tels que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $t > 0$  on a

$$\|Y(t)\| \leq Ke^{-ta} \left( \|Y_0\| + \int_0^t e^{sa} \varepsilon \|Y(s)\| ds \right)$$

dès que

$$\forall s \in [0, t] \quad \|f(Y(s)) - AY(s)\| \leq \varepsilon \|Y(s)\|.$$

c) En déduire qu'il existe  $b > 0$ ,  $\delta > 0$  et  $C > 0$  tels que pour  $Y_0 \in \mathbb{R}^2$  avec  $\|Y_0\| \leq \delta$ , on a

$$\forall t \in [0, +\infty[ \quad \|Y(t)\| \leq Ce^{-bt}.$$

d) Soit  $y : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $z : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifient

$$\begin{cases} y' = zy(1-y) \\ z' = y - z \\ y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \end{cases}$$

où  $y_0 \in \mathbb{R}$  et  $z_0 \in \mathbb{R}$ .

Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que si  $|y_0 - 1|^2 + |z_0 - 1|^2 \leq \delta^2$ , alors  $y(t)$  et  $z(t)$  tendent vers 1 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

\*   \*

\*