

CONCOURS D'ADMISSION 2013

FILIÈRE **PC**

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

★ ★ ★

Dans ce problème,  $n \geq 2$  est un entier et  $\mathbf{M}_n$  désigne l'espace vectoriel des matrices de taille  $n \times n$  à coefficients réels. La transposée d'une matrice  $A \in \mathbf{M}_n$  est notée  ${}^tA$ . Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques est noté  $\mathbf{S}_n$ . Enfin, le groupe orthogonal est noté  $\mathbf{O}_n$ . On utilisera la notation de Kronecker

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On munit l'espace  $\mathbf{M}_n$  de la norme euclidienne

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij})^2}$$

où les  $a_{ij}$  sont les coefficients de  $A$ . On pourra utiliser la formule  $\|A\|^2 = \text{Tr}({}^tAA)$ .

Si  $\theta \in \mathbb{R}$  et si  $p < q$  sont des entiers entre 1 et  $n$ , on désigne par  $R_{p,q}(\theta)$  la matrice  $n \times n$  dont les coefficients  $r_{ij}$  sont donnés, pour  $1 \leq i, j \leq n$ , par

$$r_{ij} = \begin{cases} \delta_i^j & \text{si } j \neq p, q, \\ \delta_i^j & \text{si } i \neq p, q, \\ \cos \theta & \text{si } i = j = p \text{ ou } q, \\ \sin \theta & \text{si } i = q \text{ et } j = p, \\ -\sin \theta & \text{si } i = p \text{ et } j = q. \end{cases}$$

Par exemple,

$$R_{1,2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & & & & \\ \sin \theta & \cos \theta & & & & \\ & & O_{2 \times (n-2)} & & & \\ & & & I_{n-2} & & \end{pmatrix}.$$

Soit  $(A^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite quelconque de matrices dans  $\mathbf{M}_n$ . On dit que  $A^{(m)}$  converge vers  $A$  si  $A \in \mathbf{M}_n$  et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|A^{(m)} - A\| = 0.$$

Il revient au même de dire que pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ , la suite des coefficients  $a_{ij}^{(m)}$  de  $A^{(m)}$  converge vers  $a_{ij}$ , le coefficient de  $A$  correspondant.

## 1 Préliminaires

1. On suppose dans cette question que  $n = 3$ . Quelle interprétation géométrique peut-on donner de  $R_{p,q}(\theta)$  ?
2. Calculer le produit  ${}^t(R_{p,q}(\theta))R_{p,q}(\theta)$ . Quelle propriété de  $R_{p,q}(\theta)$  reconnaît-on ?
3. On se donne  $S \in \mathbf{S}_n$  et  $R \in \mathbf{O}_n$ . Vérifier que  ${}^tRSR$  est symétrique et qu'elle est semblable à  $S$ .
4. Soit  $A \in \mathbf{M}_n$  et  $U, V \in \mathbf{O}_n$ . Montrer que  $\|UAV\| = \|A\|$ .
5. On se donne quatre nombres réels  $a \leq b \leq c \leq d$  tels que  $a + d = b + c$ . Étudier les variations de la fonction  $x \mapsto |x-a| - |x-b| - |x-c| + |x-d|$  ; montrer qu'elle est à valeurs positives. *Un raisonnement étayé par une représentation graphique sera le bienvenu.*

## 2 Conjugaison par une matrice de rotation

On se donne une matrice  $S \in \mathbf{S}_n$ , un angle  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et des entiers  $1 \leq p < q \leq n$  tels que  $s_{pq} \neq 0$ . On définit  $S' = {}^tR_{p,q}(\theta)SR_{p,q}(\theta)$  et on note  $s'_{ij}$  ses coefficients.

6. Montrer que  $s'_{qq} + s'_{pp} = s_{qq} + s_{pp}$ .
7. Exprimer les coefficients  $s'_{ij}$  de  $S'$  en fonction de ceux de  $S$ .
8. On cherche un angle  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  pour lequel on ait  $s'_{pq} = 0$ .  
(a) Montrer que  $s'_{pq} = 0$  si et seulement si  $t = \tan \theta$  satisfait l'équation

$$(1) \quad t^2 + \frac{s_{pp} - s_{qq}}{s_{pq}} t - 1 = 0.$$

- (b) Montrer que cette équation admet une solution  $t_0 \in ]-1, 1]$  et une autre  $t_1 \notin ]-1, 1]$ . Quelle est la relation entre les angles  $\theta_0$  et  $\theta_1$  qui correspondent à ces racines ?
- (c) Dans toute la suite, on choisit l'une des deux racines  $t$  de l'équation (1). On a donc  $s'_{pq} = 0$ . *Un choix plus précis sera fait à partir de la question 12.*  
Vérifier que  $s'_{pp} - s_{pp} = ts_{pq}$  ; établir une formule analogue pour  $s'_{qq} - s_{qq}$ .
- (d) On décompose  $S$  sous la forme  $S = D + E$  avec  $D$  diagonale et  $E$  à diagonale nulle. On décompose de même  $S' = D' + E'$ . Calculer  $\|E'\|^2$  en fonction de  $\|E\|^2$  et de  $(s_{pq})^2$ .

- (e) En justifiant que  $\|S'\| = \|S\|$ , en déduire une expression de  $\|D'\|^2$  au moyen de  $\|D\|^2$  et de  $(s_{pq})^2$ .
9. Montrer que les coefficients de  $S'$  s'expriment uniquement en fonction de ceux de  $S$  et de la racine ( $t_0$  ou  $t_1$ ) qu'on a choisie.
10. On suppose dans cette question que  $s_{pq}$  est le coefficient de plus grande valeur absolue de  $E$ .
- (a) Montrer que  $\|E'\| \leq \rho \|E\|$  où  $\rho < 1$  est une constante que l'on explicitera.
- (b) Si on choisit la racine  $t_0$ , montrer en outre que  $\|D' - D\| \leq \|E\|$ .
11. En calculant  $(s'_{qq} - s'_{pp})^2 - (s_{qq} - s_{pp})^2$ , montrer que
- $$|s'_{qq} - s'_{pp}| \geq |s_{qq} - s_{pp}|.$$
12. **Dorénavant, et jusqu'à la fin du problème, on choisit la racine  $t_0$  de (1) et donc l'angle  $\theta_0$ , mentionnés à la Question 8b.**
- (a) Montrer que  $s_{pp} - s'_{pp}$  et  $s'_{qq} - s_{qq}$  sont du même signe que  $s_{qq} - s_{pp}$ .
- (b) Si  $1 \leq i \leq n$ , montrer que

$$|s_{ii} - s'_{qq}| + |s_{ii} - s'_{pp}| - |s_{ii} - s_{pp}| - |s_{ii} - s_{qq}| \geq 0.$$

13. On définit

$$R = \sum_{i,j=1}^n |s_{jj} - s_{ii}| \quad \text{et} \quad R' = \sum_{i,j=1}^n |s'_{jj} - s'_{ii}|.$$

Montrer que

$$R' - R \geq 2(|s'_{qq} - s_{qq}| + |s'_{pp} - s_{pp}|) = 2 \sum_{i=1}^n |s'_{ii} - s_{ii}|.$$

### 3 Algorithme de Jacobi incomplet

Dans l'algorithme de Jacobi, on part d'une matrice  $\Sigma \in \mathbf{S}_n$  et on construit une suite de matrices symétriques  $\Sigma^{(m)}$ , dont les coefficients sont notés  $\sigma_{ij}^{(m)}$ , de la façon suivante :

- On pose  $\Sigma^{(0)} = \Sigma$ .
- Lorsque  $\Sigma^{(m)}$  est connue, on choisit un couple  $(p_m, q_m)$  avec  $p_m < q_m$ .
- On applique alors les calculs de la Partie 2 à la matrice  $S = \Sigma^{(m)}$  et au couple  $(p, q) = (p_m, q_m)$  : on forme la matrice  $S'$  étudiée dans cette partie, et on l'appelle  $\Sigma^{(m+1)}$ .

À ce stade, on ne précise pas la manière de choisir  $(p_m, q_m)$  ; c'est pourquoi l'algorithme est dit *incomplet*.

14. On définit

$$R_m = \sum_{i,j=1}^n |\sigma_{jj}^{(m)} - \sigma_{ii}^{(m)}|, \quad \varepsilon_m = \sum_{i=1}^n |\sigma_{ii}^{(m+1)} - \sigma_{ii}^{(m)}|.$$

Vérifier que  $R_{m+1} - R_m \geq 2\varepsilon_m$ . En déduire que la série  $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$  est convergente.

15. On décompose  $\Sigma^{(m)}$  sous la forme  $D^{(m)} + E^{(m)}$  où  $D^{(m)}$  est diagonale et  $E^{(m)}$  est à diagonale nulle. Montrer que la suite  $(D^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  est convergente. On notera  $D$  sa limite.

## 4 Convergence et polynôme caractéristique

Soit  $(A^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathbf{M}_n$ . On suppose que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la matrice  $A^{(m+1)}$  est semblable à  $A^{(m)}$ .

16. Montrer que  $A^{(m)}$  est semblable à  $A^{(0)}$ .
17. On suppose de plus que cette suite converge vers une matrice diagonale  $D$ . Si  $P_m$  désigne le polynôme caractéristique de  $A^{(m)}$ , montrer que les coefficients de  $P_m$  convergent vers ceux du polynôme caractéristique de  $D$  quand  $m \rightarrow +\infty$ .  
En déduire que le polynôme caractéristique de  $D$  est égal à celui de  $A^{(0)}$ .
18. Finalement, montrer que les termes diagonaux de  $D$  sont les valeurs propres de  $A^{(0)}$ . Que peut-on dire de leurs multiplicités ?

## 5 Algorithme de Jacobi ; version optimale

Dans la version optimale de l'algorithme de Jacobi, on choisit pour chaque  $m$  un couple  $(p_m, q_m)$  de sorte que la valeur absolue du coefficient  $\sigma_{ij}^{(m)}$  soit maximale précisément quand  $(i, j) = (p_m, q_m)$ . Autrement dit,

$$\forall i < j, \quad |\sigma_{ij}^{(m)}| \leq |\sigma_{p_m q_m}^{(m)}|.$$

19. Montrer que pour  $m \rightarrow +\infty$ , la suite  $(\Sigma^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice diagonale  $D$ .
20. Montrer alors que les coefficients diagonaux de  $D$  sont les valeurs propres de  $\Sigma$ .
21. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Montrer que
$$\|D - D^{(m)}\| \leq \frac{\rho^m}{1 - \rho} \|E^{(0)}\|.$$
22. En vous appuyant sur les réponses aux questions précédentes, donnez votre avis quant à la rapidité de la convergence des  $d_{ii}^{(m)}$  vers les valeurs propres de  $\Sigma$ .

*Les propriétés de la méthode de Jacobi sont aujourd'hui encore mal comprises. Dans sa version optimale, et sous l'hypothèse que les valeurs propres de  $\Sigma$  sont simples, elle converge au moins quadratiquement, et probablement encore plus vite. L'estimation de la question 21 est donc grossière. Elle est d'ailleurs satisfaite "en moyenne" lorsqu'on choisit  $(p_m, q_m)$  au hasard, ce qui entraîne la convergence "presque sûrement".*

★ ★  
★