

**ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI  
ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2020**

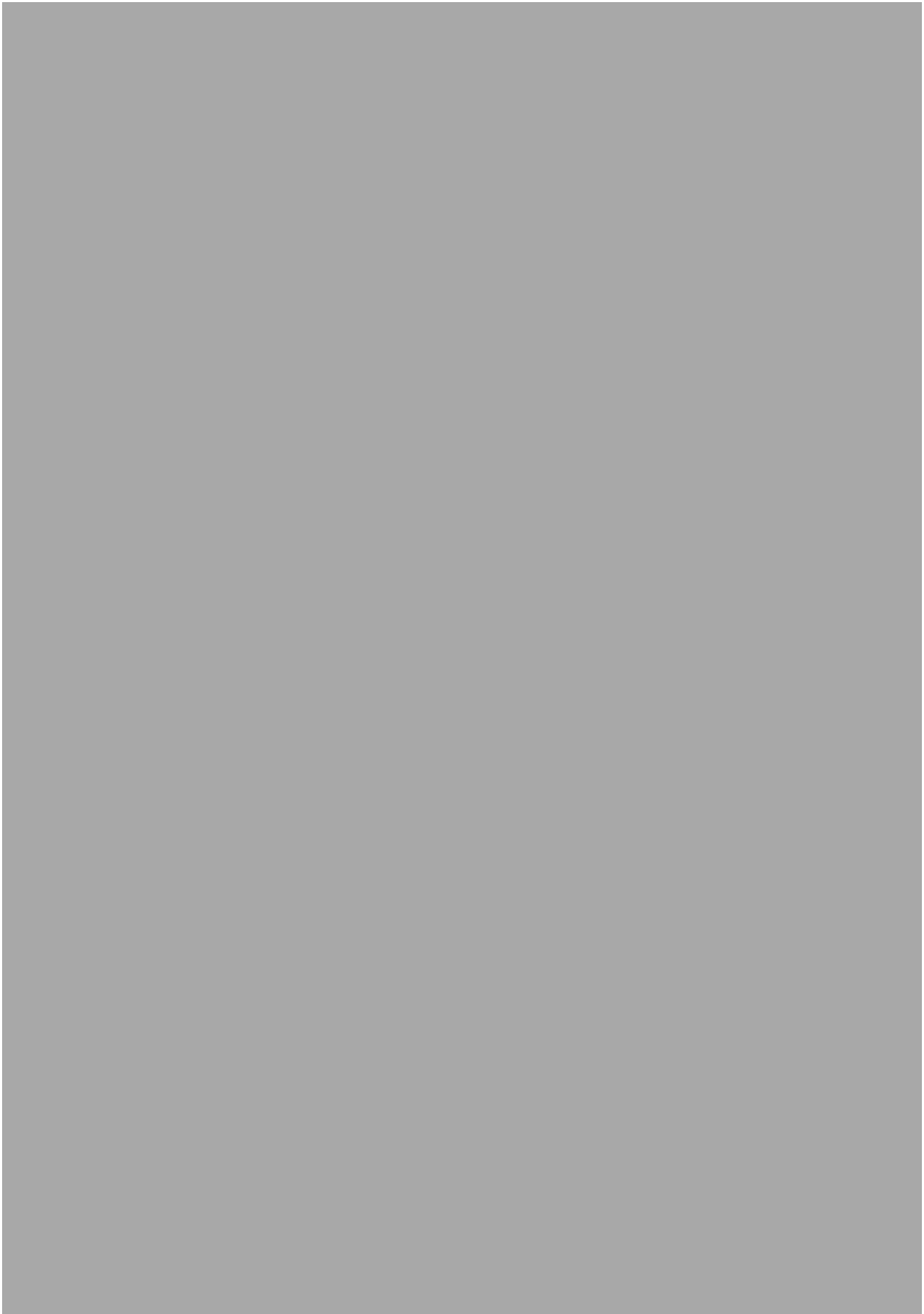
**LUNDI 20 AVRIL 2020 - 8h00 – 12h00**

**FILIERE PC - Epreuve n° 1**

**MATHEMATIQUES  
(XEULC)**

***Durée : 4 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve***



## NOTATIONS

Dans tout le problème, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $a \leq b$ , on notera  $\llbracket a, b \rrbracket = \{i \in \mathbb{N} \mid a \leq i \leq b\}$  l'ensemble des entiers compris entre  $a$  et  $b$ .

Soient  $p, q \in \mathbb{N}^*$  deux entiers strictement positifs. On note  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à coefficients réels de taille  $p \times q$  ( $p$  lignes et  $q$  colonnes). Lorsque  $p = q$ , on notera  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $p \times p$ .

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ,  $A^T \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$  désignera la transposée de  $A$ . Un vecteur  $u \in \mathbb{R}^p$  pourra être identifié à un vecteur colonne de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  et  $u^T$  sera le vecteur ligne associé de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ .

Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ , on note  $A \odot B$  la matrice de  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  définie pour tous  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq q$  par :

$$(A \odot B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$$

où pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ,  $M_{ij}$  désigne le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ .

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ , on définit  $A^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  la matrice telle que  $A_{ij}^{(0)} = 1$  pour tous  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq q$  puis par récurrence,  $A^{(n+1)} = A^{(n)} \odot A$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Enfin, on dira qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est symétrique positive si  $A^T = A$  et  $u^T A u \geq 0$  pour tout  $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ . L'ensemble des matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  sera noté  $\text{Sym}^+(p)$ .

## DÉPENDANCES DES PARTIES

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II et la partie V dépend des parties précédentes.

### PARTIE I

- (1) Montrer que pour toutes matrices  $A$  et  $B$  dans  $\text{Sym}^+(p)$  et tous réels positifs  $a$  et  $b$ , on a  $aA + bB \in \text{Sym}^+(p)$
- (2) Montrer que si  $v \in \mathbb{R}^p$  alors la matrice  $A = (A_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$  définie par  $A = vv^T$  est dans  $\text{Sym}^+(p)$ .
- (3) (a) Montrer que pour tous  $u, v \in \mathbb{R}^p$ , on a  $(uu^T) \odot (vv^T) = (u \odot v)(u \odot v)^T$ .  
 (b) Soit  $A \in \text{Sym}^+(p)$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres (avec multiplicité) de  $A$  et  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille orthonormale de vecteurs propres associés. Montrer que  $\lambda_k \geq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et que  $A = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T$ .  
 (c) En déduire que si  $A, B \in \text{Sym}^+(p)$  alors  $A \odot B \in \text{Sym}^+(p)$ .

### PARTIE II

Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , on note  $f[A] \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $f[A]_{ij} = f(A_{ij})$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ .

- (4) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  où  $a_k \geq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  un polynôme à coefficients positifs.  
 (a) Vérifier que  $P[A] = \sum_{k=0}^n a_k A^{(k)}$  pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .  
 (b) Montrer que si  $A \in \text{Sym}^+(p)$  alors  $P[A] \in \text{Sym}^+(p)$ .

On pose, pour tout  $n \geq 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  où  $k!$  désigne la factorielle de  $k$ .

(5) Soit  $A \in \text{Sym}^+(p)$ .

(a) Montrer que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n[A]_{ij} = \exp(A_{ij}).$$

(b) Montrer que  $\exp[A] \in \text{Sym}^+(p)$ .

(c) Soit  $u \in \mathbb{R}^p$ . Montrer que  $\exp[A] \odot (uu^T) \in \text{Sym}^+(p)$ .

(6) Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . On considère un  $p$ -uplet  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^d$  et la matrice

$$A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$$

où  $\langle a, b \rangle$  désigne le produit scalaire usuel entre deux vecteurs  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^d$ . On notera  $|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$  la norme de  $a$ .

(a) Montrer que  $A \in \text{Sym}^+(p)$ .

(b) On note  $u \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de coordonnées  $(\exp(-\frac{|x_1|^2}{2}), \dots, \exp(-\frac{|x_p|^2}{2}))$ . Montrer que  $(\exp[A] \odot (uu^T))_{ij} = \exp(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2})$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ .

(c) Soient  $\lambda > 0$  et  $K \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $K_{ij} = \exp(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2\lambda})$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ . Montrer que  $K \in \text{Sym}^+(p)$ .

### PARTIE III

Soit  $\lambda > 0$  fixé. On considère ici l'espace  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans toute la suite, on désigne par  $\mathcal{E}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (*on ne demande pas de vérifier ce fait*) défini par

$$\mathcal{E} = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R} \ |f(y)| \leq A \exp(-y^2/a) \}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $\tau_x : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'application définie pour tout  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  par

$$\tau_x(f)(y) = f(y - x)$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}$ . Enfin on définit la fonction  $\gamma_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\gamma_\lambda(y) = \exp(-y^2/\lambda).$$

(7) Pour tout  $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ , montrer que  $fg$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tous  $f, g \in \mathcal{E}$ , on définit

$$(f \mid g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)dy.$$

(8) (a) Montrer que pour tout  $f \in \mathcal{E}$ , on a  $(f \mid f) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $f = 0$ .

(b) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_x(\gamma_\lambda)$  appartient à  $\mathcal{E}$ .

(9) (a) Soit  $a > 0$ . Montrer qu'il existe  $c \geq 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) dy = c \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right).$$

*Indication : On pourra montrer l'égalité*

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}.$$

- (b) Soit  $g \in \mathcal{E}$ . On considère  $C(g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$C(g)(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid g).$$

Montrer que  $C(g) \in \mathcal{E}$ .

- (c) Montrer que  $C : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  définit un endomorphisme de  $\mathcal{E}$ .

#### PARTIE IV

Soit  $\lambda > 0$  fixé. On considère maintenant l'ensemble  $\mathcal{G}$  des fonctions  $g$  s'écrivant sous la forme  $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$  où  $n$  est un entier strictement positif et  $((x_i, \alpha_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une famille d'éléments de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \mid n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\}.$$

On notera  $\mathcal{H} = C(\mathcal{G})$  l'image de  $\mathcal{G}$  par l'endomorphisme  $C$  introduit dans la question (9b).

- (10) Montrer que  $\mathcal{G}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  qui contient toutes les fonctions  $\tau_x(\gamma_\lambda)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  arbitraire.
- (11) (a) Montrer qu'il existe  $c_\lambda > 0$  telle que pour tout  $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  on a

$$(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x - x').$$

*Indication : On pourra remarquer que  $\frac{1}{\lambda}((y-x)^2 + (y-x')^2) = \frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2 + \frac{1}{2\lambda}(x' - x)^2$ .*

- (b) En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$$

et que

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\}.$$

- (12) (a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de réels telle que pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $x_i \neq x_j$  lorsque  $i \neq j$ . Montrer que la fonction  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$  est nulle si et seulement si  $\alpha_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  (*Indication : On pourra procéder par récurrence sur  $n$* ).
- (b) En déduire qu'il existe une unique application linéaire  $D$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$  telle que  $D \circ C(g) = g$  pour tout  $g \in \mathcal{G}$  et  $C \circ D(h) = h$  pour tout  $h \in \mathcal{H}$ .
- (c) Montrer que pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  que  $h(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid D(h))$ .
- (13) Pour tout  $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , on note  $(h_1 \mid h_2)_\mathcal{H} = c_\lambda (D(h_1) \mid D(h_2))$  où  $c_\lambda$  est introduit dans la question (11a).
- (a) Vérifier que  $(\mid)_\mathcal{H}$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ .
- (b) Montrer que pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathcal{H}$  on a  $h(x) = (\tau_x(\gamma_{2\lambda}) \mid h)_\mathcal{H}$ .
- (c) Montrer que pour tout  $h \in \mathcal{H}$  on a

$$\|h\|_\infty \leq \|h\|_\mathcal{H}$$

où on a posé  $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$  et  $\|h\|_\mathcal{H} = (h \mid h)_\mathcal{H}^{1/2}$ .

## PARTIE V

On fixe dans cette partie deux  $p$ -uplets  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  et  $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  de réels. On suppose que les  $x_i$  sont deux à deux distincts. On note  $\mathcal{S} = \{ h \in \mathcal{H} \mid h(x_i) = a_i \}$  l'ensemble des  $h \in \mathcal{H}$  qui valent  $a_i$  en  $x_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  (on dira qu'une telle fonction est une interpolante). On note  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par  $J(h) = \frac{1}{2} \|h\|_{\mathcal{H}}^2$  et  $J_* = \inf \{ J(h) \mid h \in \mathcal{S} \}$ .

On veut montrer dans cette partie qu'il existe une unique interpolante  $h_* \in \mathcal{S}$  qui atteint le minimum de  $J$  c'est-à-dire telle que  $J(h_*) = J_*$ . On notera  $\mathcal{S}_* = \{ h \in \mathcal{S} \mid J(h) = J_* \}$ .

(14) Montrer  $\mathcal{S}_*$  a au plus un élément.

(15) Soient  $\mathcal{H}_0 = \{ h \in \mathcal{H} \mid h(x_i) = 0 \ \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \}$  et  $\tilde{h} \in \mathcal{S}_*$  (on suppose ici  $\mathcal{S}_*$  non vide).

Montrer que  $(\tilde{h} \mid h_0)_{\mathcal{H}} = 0$  pour tout  $h_0 \in \mathcal{H}_0$ .

(16) On note  $\mathcal{H}_0^\perp = \{ h \in \mathcal{H} \mid \forall h_0 \in \mathcal{H}_0 \ (h \mid h_0)_{\mathcal{H}} = 0 \}$  le sous-espace orthogonal à  $\mathcal{H}_0$  dans  $\mathcal{H}$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$ .

(b) Montrer que  $\mathcal{H}_0^\perp$  contient le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$  engendré par les fonctions

$$\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \text{ pour } i \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$

(17) Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  (resp.  $a \in \mathbb{R}^p$ ) le vecteur de coordonnées  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  (resp.  $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ ) et  $h_\alpha = \sum_{i=1}^p \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ .

(a) Montrer que  $h_\alpha$  est une interpolante si et seulement si  $K\alpha = a$  où  $K$  est la matrice introduite dans la question (6) (ici dans le cas  $d = 1$ ).

(b) Montrer que  $K$  est inversible.

(18) En déduire qu'il existe  $\alpha_* \in \mathbb{R}^p$  tel que  $\mathcal{S}_* = \{h_{\alpha_*}\}$  et calculer la valeur de  $J_*$  en fonction de  $K$  et  $a$ .