

**ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLE NORMALES SUPERIEURES**

CONCOURS D'ADMISSION 2024

**LUNDI 15 AVRIL 2024
08h00 - 12h00**

FILIERE PC - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES (XEULS)

Durée : 4 heures

***L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

NOTATIONS

- Dans toute la suite, d désignera un entier strictement positif. On désignera par $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on notera

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B),$$

où $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^d M_{ii}$ est la trace de la matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et M^T sa transposée. Selon la convention habituelle, M_{ij} désigne le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de la matrice M pour tout $1 \leq i, j \leq d$.

- Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$, on notera $|u|$ sa norme euclidienne canonique. Un tel vecteur sera considéré comme un vecteur colonne et u^T sera le vecteur ligne associé. On notera $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^T v$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ lorsque u et v sont dans $\mathbb{R}^d$. En particulier on aura $|u|^2 = \langle u, u \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^T u$.

- On notera I_d la matrice identité de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On désignera par

$$O_d(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_d \}$$

le groupe orthogonal sur $\mathbb{R}^d$ et par

$$SO_d(\mathbb{R}) = \{ M \in O_d(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1 \}$$

le groupe spécial orthogonal, où $\det(M)$ désigne le déterminant de $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

On notera

$$\text{Dep}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times SO_d(\mathbb{R}).$$

- Pour toute famille $(a_i)_{1 \leq i \leq d}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on notera $A = (a_1 | \dots | a_d)$ la matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dont la i -ème colonne de A est formée des coordonnées du vecteur a_i .
- Pour toute famille de réels $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$, on notera $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$.

1. PRÉLIMINAIRES

- (1) Soit $R \in O_d(\mathbb{R})$. Vérifier que $\det(R) \in \{-1, +1\}$.
- (2) Vérifier que $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ la norme associée.

- (3) (a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on a $\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^T, A \rangle$.
- (b) Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
- (c) En déduire que pour tous A, B et C dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\langle A, BC \rangle = \langle B^T A, C \rangle = \langle AC^T, B \rangle.$$

- (4) Soit $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ une matrice diagonale à coefficients positifs et soit $R \in O_d(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $|R_{ii}| \leq 1$ où R_{ii} est le i -ème coefficient diagonal de R .
- (b) En déduire que $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D)$.

2. ENSEMBLE DES DÉPLACEMENTS DE $\mathbb{R}^d$

Pour tout $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on note $\phi_g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'application définie par

$$\phi_g(x) = Rx + \tau.$$

On remarquera que lorsque $\tau = 0$, ϕ_g est une rotation vectorielle de l'espace $\mathbb{R}^d$, et lorsque $R = I_d$, ϕ_g est une translation. Dans le cas général, on dira que ϕ_g est un déplacement de l'espace $\mathbb{R}^d$.

- (5) (a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a - b|$.
- (b) Montrer pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $\phi_g = \phi_{g'}$ si et seulement si $g = g'$.
- (c) Montrer qu'il existe un unique $e \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que ϕ_e soit l'application identité sur $\mathbb{R}^d$ c'est-à-dire que $\phi_e(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
- (6) (a) Vérifier que pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, il existe un unique $g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$. On notera $g'g$ cet élément dans la suite.

- (b) Vérifier que pour tous g_1, g_2 et g_3 dans $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ on a $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$.
- (7) Soit $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.
- (a) Montrer que ϕ_g est bijective. On note ϕ_g^{-1} son application réciproque.
- (b) Montrer qu'il existe un unique $g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, que l'on explicitera en fonction de g , tel que $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$. On notera $g' = g^{-1}$.
- (c) Vérifier que $ge = eg = g$ puis que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.
- (8) Pour quelles valeurs de d a-t-on $gg' = g'g$ pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$?

3. DISTANCE À DÉPLACEMENT PRÈS

On considère n un entier strictement positif et

$$\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) = \{ \mathbf{z} = (\mathbf{z}_i)_{1 \leq i \leq n} \mid \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq n \}$$

l'espace vectoriel des familles de n points dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mathbf{z}_i|^2}$.

Pour tous $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ on note

$$g \cdot \mathbf{z} = (\phi_g(\mathbf{z}_i))_{1 \leq i \leq n}. \quad (1)$$

- (9) (a) Montrer que pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on a $g \cdot (g' \cdot \mathbf{z}) = (gg') \cdot \mathbf{z}$.

- (b) Montrer que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, si $\mathbf{x} = g \cdot \mathbf{y}$ alors $\mathbf{y} = g^{-1} \cdot \mathbf{x}$.

Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf \{ \|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \}. \quad (2)$$

- (10) (a) Montrer que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|g \cdot \mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

- (b) En déduire que $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

(c) Montrer que pour tous $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3$ et $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$, on a

$$\|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|g' \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

(d) En déduire que $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

(11) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note $c(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) \mid \exists g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d), g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \}$.

(a) Montrer que si $c(\mathbf{x}) \cap c(\mathbf{y}) \neq \emptyset$ alors $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$.

(b) Montrer que si $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$ alors $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

4. UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

On fixe dans cette partie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et on introduit pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - (R\mathbf{x}_i + \tau)|^2 = \|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\|^2$$

où $g = (\tau, R)$.

(12) On note $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ et $\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i$.

(a) Montrer que $J(\tau, R) = (\sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})|^2) + n|\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau|^2$.

(b) En déduire que pour tout $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, l'application $\tau \mapsto J(\tau, R)$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ a un unique minimum, noté $\tau(R)$, que l'on explicitera.

(13) On munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de la topologie associée à la norme $\|M\| = \sqrt{\langle M, M \rangle}$.

(a) Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^T M$ est continue.

(b) Montrer que $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

(14) (a) Montrer qu'il existe $R_* \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ tel que $J(\tau(R_*), R_*) \leq J(\tau, R)$ pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

(b) Montrer que R_* n'est pas forcément unique.

(15) Montrer que si $V_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}|^2$ et $V_n(\mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}|^2$ alors

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = nV_n(\mathbf{x}) + nV_n(\mathbf{y}) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}), R \rangle \quad (3)$$

où $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une matrice que l'on précisera.

5. CALCUL DE $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ DANS LE CAS OÙ $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) > 0$.

Soit $Z \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $S = Z^T Z$.

- (16) Montrer qu'il existe une famille décroissante $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ de réels strictement positifs et une base orthonormée $(u_1, \dots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ telle que $Su_i = \lambda_i u_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

On appellera *valeurs singulières* de Z la famille $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$.

- (17) On considère $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

(a) Montrer que $(v_1, \dots, v_d)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

(b) Vérifier que si $U = (u_1 | \dots | u_d)$, $V = (v_1 | \dots | v_d)$ et $D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$ alors $Z = V D U^T$.

- (18) Mettre sous la forme précédente $Z = V D U^T$, en spécifiant vos choix de U , V et D , les matrices $Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (19) On considère que $\det(Z) > 0$.

(a) Montrer que si $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ alors $V^T R U \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle.$$

- (20) Donner la valeur de $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en fonction de $V_n(\mathbf{x})$, $V_n(\mathbf{y})$ et des valeurs singulières de $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dans le cas où $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) > 0$.

6. LE CAS OÙ $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) < 0$

On considère $R \in \text{O}_d(\mathbb{R})$.

- (21) (a) Montrer que si λ est une valeur propre de R alors $\lambda \in \{+1, -1\}$.

(b) Montrer que $\det(R + I) = \det(R) \det(I + R^T)$.

(c) En déduire que si $\det(R) = -1$ alors $\det(R + I) = 0$.

On suppose dorénavant que $\det(R) = -1$.

(22) (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(u_1, \dots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ telle que l'on a $Ru_d = -u_d$ et $u_d^T Rx = 0$ pour tout $x \in E_1$ où $E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1})$.

(b) En déduire que $R(E_1) \subset E_1$ puis que $R(E_1) = E_1$.

On considère une matrice $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_i \geq 0$ décroissants. On note $U = (u_1 | \dots | u_d)$.

(23) (a) Vérifier que $\langle D, R \rangle = \langle S, R' \rangle$ où $R' = U^T RU$ et $S = U^T DU$.

(b) Montrer que si $R_0 = (R'_{ij})_{1 \leq i, j \leq d-1} \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$ alors $R_0 \in \text{O}_{d-1}(\mathbb{R})$.

(24) On pose $S_0 = (S_{ij})_{1 \leq i, j \leq d-1} \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\langle D, R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{dd}$.

(b) Montrer que $\text{tr}(S_0 R_0) \leq \text{tr}(S_0)$.

(c) Montrer que $\text{tr}(S_0) + S_{dd} = \text{tr}(D)$ et en déduire que $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D) - 2S_{dd}$.

(25) (a) Montrer que $S_{dd} = \sum_{j=1}^d \alpha_j U_{jd}^2$ où $U = (U_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$.

(b) En déduire que $\langle D, R \rangle \leq (\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i) - \alpha_d$.

(26) Donner la valeur de $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en fonction de $V_n(\mathbf{x})$, $V_n(\mathbf{y})$ et des valeurs singulières de $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dans le cas où $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) < 0$.