CX2611

Banque commune **École Polytechnique – ENS de Cachan**

PSI

Session 2012

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 **heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de calculatrice électronique de poche à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé selon la circulaire n°99018 du 1er février 1999. De plus, une seule calculatrice est admise sur la table, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Téléchargé gratuitement sur www.prepary.fr

Dans tout le problème, on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ est coercive si et seulement si elle est continue et vérifie

$$\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

où la norme de x correspond à la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$.

L'objectif du problème est d'étudier certains exemples de fonctions coercives, de montrer en particulier qu'elles possèdent toujours un ou plusieurs minimum global et d'en étudier des méthodes d'approximation. Le préambule contient un résultat utilisé tout au long du problème. Les quatre parties sont assez largement indépendantes.

On note $(.,.)$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbf{R}^n$ et pour toute fonction f de classe C^1 de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, $\nabla f(x)$ le vecteur gradient de f au point x formé des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

PREAMBULE

1. Soit f une fonction coercive de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que si $||x|| > M$, alors

$$f(x) \geq |f(0)| + 1 \ .$$

2. En déduire qu'il existe un élément $x^* \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad f(x^*) \leq f(x) \ .$$

On dit alors que x^* est un minimum global de f sur $\mathbf{R}^n$.

3. On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^n$. Que peut-on dire de $\nabla f(x^*)$?

Téléchargé gratuitement sur www.prepary.fr

PARTIE 1

Dans cette partie, on considère la fonction g de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}^3, \quad g(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

où $b \in \mathbf{R}^3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique telle que

$$\exists C > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^3, \quad (Ax, x) \geq C||x||^2 \ .$$

4. Montrer que g est coercive.

5. Montrer que g est de classe C^1 de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ et que

$$\nabla g(x) = Ax - b \ .$$

En déduire que g possède un unique minimum global noté x^*.

6. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}^3$ telle que $u_0 \in \mathbf{R}^3$ quelconque et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad u_{k+1} = u_k - \alpha \nabla g(u_k)$$

où α est un réel positif fixé. Montrer que

$$u_{k+1} - x^* = (I_3 - \alpha A)(u_k - x^*)$$

où I_3 désigne la matrice identité de taille 3.

7. On note L la plus grande valeur propre de A (en valeur absolue). Montrer que si $\alpha \in]0, \frac{2}{L}[$, alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente vers x^*.

PARTIE 2

Dans cette partie , on considère la fonction h de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = x^2 \ .$$

On s'intéresse aux suite réelles $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$, appelées suites de descente par gradient de h, définies de la manière suivante :

$$x_0 \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbf{N}, \ x_{k+1} = x_k + \epsilon_k t_k$$

Téléchargé gratuitement sur www.prepary.fr

avec

$$\epsilon_k = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad x_k < 0 \\ -1 \quad \text{si} \quad x_k > 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x_k = 0 \end{cases}$$

et où t_k est un réel choisi dans l'intervalle $]0, 2|x_k|[$ si $x_k \neq 0$ et $t_k = 0$ si $x_k = 0$.

8. Montrer que si $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de descente par gradient de h, alors

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad h(x_{k+1}) \leq h(x_k) \ .$$

9. On considère la suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $v_0 = 2$ et

$$v_{k+1} = v_k - \frac{1}{2^{k+1}} \ .$$

Montrer que $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction h qui ne converge pas vers le minimum global de h.

10. On considère la suite $(w_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $w_0 = 2$ et

$$w_{k+1} = w_k + (-1)^{k+1}(2 + \frac{3}{2^{k+1}}) \ .$$

Montrer que $(w_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction h non convergente.

PARTIE 3.

Soit $x \in \mathbf{R}^n$ et f une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. On note

$$D_x = \{d \in \mathbf{R}^n, \quad ||d|| = 1 \text{ et } (d, \nabla f(x)) < 0\} \ .$$

11. Montrer que D_x est non vide si $\nabla f(x) \neq 0$ et que si $d \in D_x$, alors

$$T_{d,x} = \{t \in \mathbf{R}_+^*, \quad f(x + td) < f(x)\}$$

est également non vide.

Téléchargé gratuitement sur www.prepary.fr

On considère une suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ telle que

$$x_0 \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbf{N},\ x_{k+1} = x_k + t_k d_k \tag{1}$$

avec

$$\begin{cases} d_k \in D_{x_k} \text{ et } t_k \in T_{d_k,x_k} \text{ si } \nabla f(x_k) \neq 0 \\ d_k = 0 \text{ et } t_k = 0 \text{ si } \nabla f(x_k) = 0 \end{cases}$$

On dit alors que $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction f.

12. Vérifier que la définition précédente coïncide bien avec la définition des suites de descente par gradient donnée dans la partie 2 pour la fonction particulière h.

13. Dans le cas général, montrer que si f est de plus une fonction coercive, alors la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente et la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée.

14. On reprend dans cette questions les notations et définitions de la partie 1. Montrer que lorsque α appartient à un intervalle de $\mathbf{R}_+^*$ qu'on déterminera, la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction g. On pourra commencer par montrer que

$$g(u_{k+1}) - g(u_k) = -\alpha ||r_k||^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 (Ar_k, r_k)$$

avec $r_k = \nabla g(u_k)$.

PARTIE 4.

Dans toute cette partie, f désigne une fonction de classe C^1, coercive de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ et $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de descente par gradient pour la fonction f (c'est à dire définie par la relation (1) de la partie 3).

15. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie de plus la condition suivante :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + m_1 t_k (d_k, \nabla f(x_k)) \tag{2}$$

où m_1 est un réel fixé dans $]0, 1[$

Téléchargé gratuitement sur www.prepary.fr

Montrer que pour toute suite de descente par gradient vérifiant la condition (2), la série de terme général $(t_k(d_k, \nabla f(x_k)))_{k\in\mathbf{N}}$ est minorée puis que

$$\lim_{k\to+\infty} t_k(d_k, \nabla f(x_k)) = 0 \ .$$

16. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de descente par gradient de f vérifie la condition (2) et la condition supplémentaire suivante :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad t_k \geq \min(C_1, C_2|(d_k, \nabla f(x_k))|) \tag{3}$$

où C_1 et C_2 sont deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} (d_k, \nabla f(x_k)) = 0 \ .$$

17. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de descente par gradient de f vérifie les conditions (2), (3) et que si $\nabla f(x_k) \neq 0$,

$$d_k = -\frac{B\nabla f(x_k)}{||B\nabla f(x_k)||}$$

où B est une matrice symétrique de taille n dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \nabla f(x_k) = 0 \ .$$

18. On suppose dans cette question et la suivante que $n = 1$ et de plus que f est coercive, de classe C^2 et strictement convexe, c'est à dire :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \forall \lambda \in]0,1[, \ x_1 \neq x_2 \implies f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \ .$$

Montrer que f possède un unique minimum global x^* sur $\mathbf{R}$.

19. Les hypothèses de la question précédente sont conservées. A partir d'un réel x_0 quelconque, proposer un algorithme de construction d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de descente par gradient pour la fonction f qui vérifie les conditions (2) et (3). En déduire qu'une telle suite est convergente vers l'unique minimum global de f (on admettra que de toute suite réelle bornée on peut extraire une sous suite convergente et que si toutes ces sous-suites convergentes possèdent une même limite, alors la suite est convergente).

Téléchargé gratuitement sur www.prepary.fr