

CX3611

Banque commune École Polytechnique - ENS de Cachan

PSI

Session 2013

* * *

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

* * *

Aucun document n'est autorisé

Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs, $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des nombres réels strictement négatifs, et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$, on note $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour une fonction f continue et bornée sur I , on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

On note pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $m \in \mathbb{R}$

$$T_m(x) = \int_0^\infty t^m e^{-(t^2+x/t)} dt.$$

On pourra librement utiliser la formule $T_0(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. a) Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$, l'intégrale qui définit $T_m(x)$ est convergente.
- b) Quel est l'intervalle A des $m \in \mathbb{R}$ tels que l'intégrale qui définit $T_m(0)$ est convergente ?
- c) Calculer $T_{2k}(0)$ et $T_{2k+1}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$ (en fonction de $k!$ et $(2k)!$).
2. a) Soit $m \in A$. Montrer que T_m est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- b) Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que T_m est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- c) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$,

$$T_m(x) \geq e^{-1} \int_0^1 t^m e^{-x/t} dt.$$

En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0^+} T_m(x)$ lorsque $m \notin A$, en utilisant le changement de variable $w = x/t$.

3. a) Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que T_m est de Classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer T'_m en fonction de T_{m-1} .

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. La fonction T_m est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$? Quel est le sens de variation de T_m sur $\mathbb{R}_+^*$? La fonction T_m est-elle convexe sur $\mathbb{R}_+^*$?

c) Discuter en fonction de $m \in \mathbb{R}$ la dérivabilité à droite de T_m en 0.

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$. Calculer $T_m(x)$ en fonction de $T_{m-2}(x)$ et $T_{m-3}(x)$. On pourra pour cela considérer la quantité

$$\int_A^B t^{m-1} (2t - x/t^2) e^{-(t^2+x/t)} dt,$$

pour $0 < A < B$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. trouver une relation entre $x T_m'''(x)$, $T_m''(x)$ et $T_m(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

5. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$. Effectuer le changement de variable $t = 1/u$ dans l'intégrale qui définit T_m . On justifiera soigneusement le calcul.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de la quantité $\int_0^\infty u^n e^{-u} du$ et la calculer.

c) Montrer que pour $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $T_{-m}(1) \leq (m-2)!$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1) x^n$ vérifie $R \geq 1$.

e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $x \in]-1, 1[$,

$$T_k(1+x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1) x^n.$$

6. Pour $t, x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(t, x) = t^2 + x/t$.

a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(t, x)$ est convexe et admet un unique minimum en $t = M(x)$, que l'on déterminera. Calculer $g(M(x), x)$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}_+$, et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer en utilisant l'inégalité $M(x) \leq x^{1/3}$ que

$$T_m(x) \leq \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)} dt + e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \left(\int_{x^{1/3}}^\infty t^m e^{-\frac{t^2}{20}} dt \right).$$

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ (et $m \in \mathbb{R}_+$), l'on peut trouver $C > 0$ tel que

$$\forall t \geq 1, \quad t^m \leq C t e^{\varepsilon t^2}.$$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \left(\int_{x^{1/3}}^\infty t^m e^{-\frac{t^2}{20}} dt \right) = O_{x \rightarrow \infty}(e^{-[\frac{39}{20}-\varepsilon]x^{2/3}}).$$

d) Montrer que

$$T_m(x) = O_{x \rightarrow \infty}(x^{\frac{m+1}{3}} e^{-3(x/2)^{2/3}}).$$

7. a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$T_{-1}(x) \leq \int_0^1 e^{-1/u^2} \frac{du}{u} + \int_1^\infty e^{-xu} \frac{du}{u}.$$

En déduire que $T_{-1}(x) \leq 2$ pour $x \geq 1$ et que

$$T_{-1}(x) \leq 2 + \int_x^1 e^{-w} \frac{dw}{w} \leq 2 - \ln x$$

si $0 < x \leq 1$.

b) Soit $L \in [0, 1]$, et $\rho \in C([0, L])$. On pose

$$[F(\rho)](x) = \int_0^L \rho(y) T_{-1}(|x-y|) dy.$$

Montrer que $[F(\rho)](x)$ est bien définie pour $x \in [0, L]$ et que

$$\|F(\rho)\|_{\infty} \leq (4L + 2L |\ln L|) \|\rho\|_{\infty}.$$

8. Soit $L > 0$, $\rho \in C([0, L])$, et g_0 continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose pour $x \in [0, L]$ et $v \in \mathbb{R}^*$:

$$g(x, v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_x^L \rho(y) e^{-\frac{x-y}{v}} dy, \quad \text{si } v < 0,$$

$$g(x, v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_0^x \rho(y) e^{-\frac{x-y}{v}} dy + g_0(v) e^{-\frac{x}{v}}, \quad \text{si } v > 0.$$

a) Montrer que $\alpha : x \in [0, L] \mapsto \int_0^{\infty} g_0(v) e^{-\frac{x}{v}} dv$ définit une fonction de $C([0, L])$.

b) Montrer que pour $v \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \in [0, L] \mapsto g(x, v)$ est de classe C^1 sur $[0, L]$ et

$$\forall x \in [0, L], v \in \mathbb{R}^*, \quad v \frac{\partial g}{\partial x}(x, v) = \rho(x) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - g(x, v),$$

$$\forall v \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(0, v) = g_0(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}_-^*, \quad g(L, v) = 0.$$

9. On admet dans cette question le théorème suivant : Soit $L > 0$. Si H est une application de $C([0, L])$ dans $C([0, L])$ vérifiant

$$\exists k \in [0, 1[, \quad \forall \rho_1, \rho_2 \in C([0, L]), \quad \|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_{\infty} \leq k \|\rho_1 - \rho_2\|_{\infty},$$

alors il existe un unique $\rho \in C([0, L])$ tel que $H(\rho) = \rho$.

a) Soit $L > 0$ et $\tilde{\alpha} \in C([0, L])$. Montrer que si $L \in]0, 1/20[$, il existe une unique fonction $\tilde{\rho} \in C([0, L])$ telle que

$$\forall x \in [0, L], \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\alpha}(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^L \tilde{\rho}(y) T_{-1}(|x - y|) dy.$$

b) Soit $L \in]0, 1/20[$, et g_0 continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une fonction $\tilde{g}$ de $[0, L] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

- $\forall v \in \mathbb{R}^*, \quad \tilde{g}(\cdot, v)$ est de classe C^1 sur $[0, L]$,
- $\forall x \in [0, L], \quad \tilde{g}(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$,
- $\forall x \in [0, L], v \in \mathbb{R}^*, \quad v \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x, v) = \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \tilde{g}(x, w) dw + \int_{\mathbb{R}_-^*} \tilde{g}(x, w) dw \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - \tilde{g}(x, v),$
- $\forall v \in \mathbb{R}_+^*, \quad \tilde{g}(0, v) = g_0(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}_-^*, \quad \tilde{g}(L, v) = 0.$

L'équation pour laquelle on a démontré un théorème d'existence est un modèle simplifié pour l'acoustique des gaz raréfiés.