

X-ENS 2017 - PSI

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes.

- Pour toute fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f sur cet intervalle (si elle existe). Ainsi, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ etc. On convient que $f^{(0)} = f$.
- Pour tout entier $n \geq 1$, on note $n! = 1 \times \cdots \times n$ la factorielle de n . On convient que $0! = 1$.
- Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes. On pose $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Le déterminant d'une matrice carrée $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\det(A)$. Sa transposée est notée ${}^tA = [a_{j,i}]_{1 \leq j,i \leq n}$. Lorsque $A = [a_{1,1}] \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ on identifie A au réel $a_{1,1}$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n . Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales associées seront notées indistinctement. Ainsi, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme, alors la fonction polynomiale associée est encore notée P .
- Etant donné un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie E on note 0_E l'élément nul de E , et on note Id_E l'application identité de E dans lui même. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
Si $L \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E et $n \geq 2$ un entier naturel, on note L^n l'application composée de L avec lui même n fois : $L^n = L \circ L \circ \cdots \circ L$ (n fois). Par convention, $L^0 = \text{Id}_E$ et $L^1 = L$. Le noyau et l'image de L seront notés respectivement $\ker(L)$ et $\text{Im}(L)$.
Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E , on note $F_1 + F_2$ la somme de ces sous-espaces. On écrira $F_1 \oplus F_2$ pour signifier que cette somme est directe. Si, de plus, E est muni d'un produit scalaire, on écrira $F_1 \oplus^\perp F_2$ pour signifier que la somme est orthogonale, c'est à dire que F_1 et F_2 sont orthogonaux entre eux. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E sera noté $F^\perp$. On notera $\dim(F)$ la dimension de F .

Partie I

Soit $m \geq 2$ un entier naturel et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $2m + 1$. Cet espace est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. Soient T, M deux endomorphismes de E vérifiant les hypothèses suivantes :

- (H1) $T^{2m} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $T^{2m+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- (H2) $M^2 = \text{Id}_E$.
- (H3) $\forall (v, w) \in E^2, (M(v)|w) = (v|M(w))$.
- (H4) $T \circ M + M \circ T = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On pose dans la suite

$$F^+ = \ker(M - \text{Id}_E), \quad F^- = \ker(M + \text{Id}_E)$$

On considère l'application S de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (v, w) \in E^2, S(v, w) = (v|T(w)) + (T(v)|w)$$

et on note G l'ensemble des éléments $u \in E$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (a) $u \in \text{Im}(T)$,
- (b) $\forall v \in E, S(u, v) = 0$.

1. Pour tout vecteur $v \in E$, on pose

$$v^+ = v + M(v), \quad v^- = v - M(v)$$

- (a) Montrer que $\forall v \in E, v^+ \in F^+$ et $v^- \in F^-$.
 (b) Montrer que $E = F^+ \oplus^\perp F^-$.
 (c) Montrer que $\forall v \in F^+, T(v) \in F^-$ et que $\forall v \in F^-, T(v) \in Fk$.
 En déduire que F^+ et F^- sont stables par T^2 .
 2. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 2m\}$, $\text{Im}(T^{k+1}) \subset \text{Im}(T^k)$ et $\text{Im}(T^{k+1}) \neq \text{Im}(T^k)$.
 3. En déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, 2m+1\}$, on a

$$\dim(\text{Im}(T^k)) = 2m+1-k, \quad \dim(\ker(T^k)) = k$$

4. En déduire aussi que $\text{Im}(T^k) = \ker(T^{2m+1-k})$ pour $0 \leq k \leq 2m+1$.
 5. Soit $k \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$ et $z \in \text{Im}(T^k)^\perp \cap \text{Im}(T^{k-1})$ tel que $z \neq 0_E$. Après avoir justifié l'existence d'un tel vecteur z , montrer que $T^{2m+1-k}(z) \neq 0_E$.
 6. Montrer que pour tout nombre réel α , l'endomorphisme $\text{Id}_E + \alpha T^2$ est bijectif et que

$$(\text{Id}_E + \alpha T^2)^{-1} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha^k T^{2k}$$

où $(\text{Id}_E + \alpha T^2)^{-1}$ désigne l'endomorphisme inverse de $\text{Id}_E + \alpha T^2$.

7. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $G \cap \ker(T) = \{0_E\}$.
 8. En déduire que l'application $(v, w) \in G \times G \mapsto (T(v)|T(w))$ est un produit scalaire sur G .
 9. Soit $k \in \mathbb{N}$.
 (a) Montrer que $M \circ T^k = (-1)^k T^k \circ M$.
 (b) En déduire que $\text{Im}(T^k)$ et $\ker(T^k)$ sont stables par M .
 10. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est vraie : (i) $\ker(T) \subset F^+$, (ii) $\ker(T) \subset F^-$.
 11. On suppose ici que $\ker(T) \subset F^+$.
 (a) Montrer que $\forall z \in F^-, T^{2m}(z) = 0_E$.
 (b) Montrer que $\text{Im}(T)^\perp \subset F^+$ et que $\text{Im}(T^2)^\perp \cap \text{Im}(T) \subset F^-$.
 (c) Soit $z \in \text{Im}(T)^\perp$ avec $z \neq 0_E$. Montrer que $T(z) \in G^\perp$ et que $T(z) \neq 0_E$.
 (d) Soit $z \in \text{Im}(T^2)^\perp \cap \text{Im}(T)$ avec $z \neq 0_E$. Montrer que $T(z) \in G^\perp$ et que $T(z) \neq 0_E$.
 12. On dit désormais qu'un couple $(w_1, w_2) \in E \times E$ est une *paire caractérisante* de G si w_1 et w_2 vérifient les trois propriétés :
 (A) $w_1 \in F^+, T(w_1) \in G^\perp$ et $T(w_1) \neq 0_E$,
 (B) $w_2 \in F^-, T(w_2) \in G^\perp$ et $T(w_2) \neq 0_E$,
 (C) $w_i \in \text{Im}(T^2)^\perp$ pour $i = 1$ et $i = 2$.
 Déduire des questions précédentes l'existence d'une paire caractérisante de G .
 13. En déduire que $\dim(G) \leq 2m-2$.
 14. On suppose que G vérifie l'hypothèse suivantes

$$(\mathbf{H5}) \quad \dim(G) = 2m-2$$

Montrer que si (w_1, w_2) est une paire caractérisante de G alors $(T(w_1), T(w_2))$ constitue une base de $G^\perp$.

Partie II

On conserve toutes les notations de la partie I et on suppose que les hypothèses (H1), (H2), (H3), (H4) et (H5) sont toutes satisfaites. Soit (w_1, w_2) une paire caractérisante de G (c'est à dire vérifiant les propriétés (A), (B) et (C) de la question 12).

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le problème suivant, note $\mathcal{P}_\lambda$:

$$\text{Trouver } u \in G \text{ tel que : } \forall v \in G, (u|v) - \lambda(T(u)|T(v)) = 0 \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

et on note H_λ l'ensemble des solutions u de ce problème. On montre facilement que H_λ est un sous-espace vectoriel de G .

15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Montrer que si $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution $u \neq 0_E$, alors nécessairement $\lambda > 0$.
- (b) Soit $u \in G$. Montrer que u est une solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ si et seulement si

$$(\text{Id}_E + \lambda T^2)(u) \in G^\perp$$

En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que :

$$u = \alpha(\text{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_1) + \beta(\text{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_2)$$

- (c) Montrer que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution non nulle si et seulement si

$$Q_1(\lambda).Q_2(\lambda) = 0$$

où pour $i \in \{1, 2\}$, Q_i est le polynôme

$$Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (T^{2k+1}(w_i)|T(w_i)) X^k$$

- (d) Supposons que λ est racine du polynôme produit $Q_1 Q_2$. Montrer que $\dim(H_\lambda) = 2$ si λ est racine commune de Q_1 et de Q_2 , et $\dim(H_\lambda) = 1$ sinon.
- (e) Montrer que

$$\forall i \in \{1, 2\}, Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S(w_i, T^{2k+1}(w_i)) X^k$$

16. Soit $\mathcal{B} = (z_1, \dots, z_\ell)$, où $\ell = 2m - 2$, une base de G . Pour tout élément u de G , on note U (lettre majuscule) le vecteur colonne comportant les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$. On note $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq \ell}$ et $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq \ell}$ les deux matrices carrées dont les coefficients sont définis par

$$\forall 1 \leq i, j \leq \ell, a_{i,j} = (z_i|z_j), b_{i,j} = (T(z_i)|T(z_j))$$

- (a) Soient $u, v \in G$. Montrer que

$$(u|v) = {}^t U A V, (T(u)|T(v)) = {}^t U B V$$

et en déduire que A et B sont inversibles.

- (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'un élément $u \in G$ est solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ si et seulement si

$$(A - \lambda B)U = 0$$

En déduire que $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution non nulle si et seulement si $\det(A - \lambda B) = 0$.

(c) On définit la fonction ψ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = \frac{\det(A - tB)}{\det(B)}$$

Montrer que cette fonction ψ est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$.

- (d) Justifier pourquoi on peut choisir la base $\mathcal{B}$ de sorte que $B = I_\ell$. En déduire que ψ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.
- (e) Montrer que le polynôme ψ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et que ses racines sont soit simples soit doubles.
- (f) Montrer que

$$\psi(X) = \frac{1}{S(w_1, T^{2m-1}(w_1))S(w_2, T^{2m-1}(w_2))} Q_1(X)Q_2(X)$$

(on justifiera pourquoi nécessairement le dénominateur est non nul).

En déduire que Q_1 et Q_2 sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$ et à racines simples.

Partie III

On conserve ici les notations des parties I et II et on se place dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}_{2m}[X]$, avec $m \geq 2$ un entier naturel fixé. Cet espace vectoriel est muni du produit scalaire

$$\forall (P, Q) \in E^2, (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

Désormais, les deux endomorphismes T et M de E seront définis par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2m}[X], T(P) = P' \text{ et } M(P) = P^*$$

où $P^*(X) = P(-X)$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}_k^0[X] = \{P \in \mathbb{R}_k[X] / P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$$

17. Montrer que T et M vérifient bien les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4).

18. Quels sont les espaces F^+ et F^- dans ce cas ?

19. Montrer que

$$\forall (P, Q) \in E^2, S(P, Q) = P(1)Q(1) - P(-1)Q(-1)$$

20. Déterminer le sous-espace G . L'hypothèse (H5) est-elle satisfaite ?

21. On définit pour tout entier naturel n le polynôme R_n comme suit

$$R_n(X) = (X^2 - 1)^n$$

et on pose désormais

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} R_n^{(n)}(X)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Quel est le degré du polynôme L_n ? Exprimer $M(L_n)$ en fonction de L_n .

(b) Montrer que si $n \geq 1$ alors

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (L_n|P) = 0$$

(c) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a

$$L_n^{(k)}(1) = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{1}{k!2^k}$$

(d) Montrer que pour tout entier naturel k , on a

$$S(L_n, L_n^{(2k+1)}) = 2L_n^{(2k+1)}(1)$$

22. Montrer que le couple (L_{2m}, L_{2m-1}) est une paire caractérisante de G .

23. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le problème : trouver $P \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X]$ tel que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X], \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt - \lambda \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t) dt = 0$$

Montrer que ce problème admet une solution P non identiquement nulle si et seulement si λ est racine du polynôme

$$K(X) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m-1}^{(2k+1)}(1) X^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m}^{(2k+1)}(1) X^k \right)$$

24. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X], (P|P) \leq 4(P'|P')$$

avec inégalité stricte si P est non nul.

25. En déduire que les racines de K sont toutes réelles et appartiennent à l'intervalle $]0, 4[$.

26. Soit $(P_1, \dots, P_{2m-2})$ une base quelconque de G . On considère les deux matrices carrées $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2m-2}$ et $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2m-2}$ définies par

$$a_{i,j} = (P_i|P_j), \quad b_{i,j} = (P'_i|P'_j)$$

Déterminer le rapport

$$\frac{\det(A)}{\det(B)}$$

en fonction de m .