

X-ENS PSI 2018

On note $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}^k([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est positive si :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \geq 0$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on définit sa norme infinie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n . On définit également I_n la matrice identité de taille n . Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Si X est une variable aléatoire réelle, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ son espérance, respectivement sa variance.

Enfin, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de parties à k éléments d'un ensemble de cardinal n .

On étudie ici l'équation différentielle avec conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où $c \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et c **positive**.

Après avoir montré l'existence et l'unicité d'une solution $u \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ au problème (1), on s'intéressera à la construction d'une suite d'approximations de u .

Les parties 1, 2 et 5 sont indépendantes. Les parties 3 et 4 nécessitent d'utiliser certains résultats établis dans les parties 1 et 2.

1 Existence et unicité des solutions de (1)

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} -v_\lambda''(x) + c(x)v_\lambda(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ v_\lambda(0) = 0 \\ v_\lambda'(0) = \lambda \end{cases} \quad (1bis)$$

admet une unique solution $v_\lambda \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$.

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, v_λ peut s'exprimer sous la forme :

$$v_\lambda = \lambda w_1 + w_2$$

avec $w_1 \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ l'unique solution du système

$$\begin{cases} -w_1''(x) + c(x)w_1(x) = 0, & x \in [0, 1] \\ w_1(0) = 0 \\ w_1'(0) = 1 \end{cases}$$

et w_2 une fonction indépendante de λ à caractériser.

3. Montrer que $w_1(1) \neq 0$.
4. En déduire qu'il existe une solution $u \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ du problème (1). Montrer que cette solution est unique.
5. Montrer que si f est positive, alors u est également positive.

2 Une matrice de discrétisation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A_n la matrice carrée de taille n , constante par diagonale :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Soit $V = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ un vecteur propre de A_n associé à une valeur propre complexe λ . Montrer que λ est nécessairement réelle et que les composantes v_i de V vérifient la relation :

$$v_{i+1} - (2 - \lambda)v_i + v_{i-1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

où on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$.

7. Montrer que toute valeur propre de A_n est dans l'intervalle $]0, 4[$.
8. Soit λ une valeur propre de A_n .

(a) Montrer que les racines complexes r_1, r_2 du polynôme

$$P(r) = r^2 - (2 - \lambda)r + 1$$

sont distinctes et conjuguées.

(b) On pose $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n+1)\theta) = 0$ et $\rho = 1$.

9. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A_n ainsi qu'une base de vecteurs propres.
10. On considère la famille de matrices $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (appelées M -matrices) :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \begin{cases} b_{i,i} > 0 \\ b_{i,j} \leq 0 \text{ pour tout } j \neq i \\ \sum_{j=1}^n b_{i,j} > 0 \end{cases}$$

Montrer que si B est une M -matrice, alors on a

- (a) B est inversible
(b) Si $F = {}^t(f_1, \dots, f_n)$ a des coordonnées toutes positives, alors $B^{-1}F$ aussi,
(c) tous les coefficients de B^{-1} sont positifs.
11. En appliquant les résultats précédents à $A_n + \varepsilon I_n$ avec $\varepsilon > 0$, montrer que tous les coefficients de A_n^{-1} sont positifs.

3 Une suite d'approximations de la solution de (1)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $h = \frac{1}{n+1}$ et on considère les réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ définis par $x_i = ih$ pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$.

12. Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$, il existe une constante $C \geq 0$, indépendante de n , telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |v''(x_i) - \frac{1}{h^2}(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i))| \leq Ch^2$$

13. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + c(x_i)u_i = f(x_i), & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

14. On suppose (dans cette question seulement) que $c(x) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$. On note u la solution exacte du problème (1). Montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$, on a

$$u_i = u(x_i) = \frac{1}{2}x_i(1 - x_i)$$

15. Montrer que si f est positive, alors $u_i \geq 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$.

4 Un premier résultat de convergence

Dans toute cette partie, on supposera de plus que $c \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ et que $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ (c est toujours positive également).

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par la relation :

$$N(A) = \sup\{\|Ax\|_\infty, \|x\|_\infty \leq 1\}$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, alors

$$N(A) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) En utilisant les résultats des questions 14 et 15, montrer que pour la matrice A_n définie au début de la partie 2, on a :

$$N(((n+1)^2 A_n)^{-1}) \leq \frac{1}{8}$$

(b) En déduire que pour toute matrice diagonale $D_n = [d_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $d_{i,i} \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a également

$$N(((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1}) \leq \frac{1}{8}$$

18. Soit u l'unique solution du problème (1) et $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ la famille définie par la relation (2) pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une constante $\tilde{C} > 0$, indépendante de n , telle que

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{\tilde{C}}{n^2}$$

Indication : on pourra introduire le vecteur $X = {}^t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ où on a posé $\varepsilon_i = u(x_i) - u_i$ et calculer $A_n X$.

5 Un second résultat de convergence

On suppose dans cette partie que $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est telle que :

$$\exists \alpha \in]0, 1], \exists K \geq 0, \forall (y, z) \in [0, 1]^2, |f(y) - f(z)| \leq K|y - z|^\alpha$$

On suppose également que :

$$\forall x \in [0, 1], c(x) = 0$$

On note u la solution associée au système (1).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux polynômes :

$$B_n f(X) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

$$\hat{B}_{n+1} u(X) = \sum_{k=0}^n u_k \binom{n+1}{k} X^k (1-X)^{n+1-k}$$

où $u_0, \dots, u_n$ sont solutions du système (2), avec $c = 0$.

19. Soit $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre x . on pose

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

- (a) Exprimer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$ et $\mathbb{E}(f(S_n))$ en fonction de x , n et du polynôme $B_n f$.
 (b) En déduire les inégalités :

$$\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

20. Montrer que $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$ pour tout réel $\lambda > 0$ et en déduire l'inégalité :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2} \left(1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right)$$

pour tous $x \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$.

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

Indication : On pourra dans un premier temps exprimer $f(x) - B_n f(x)$ en fonction de $\mathbb{E}(f(x) - f(S_n))$.

22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, 1[$ on a :

$$(\hat{B}_{n+1} u)''(x) = -\frac{n}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n-1} f\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right) \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell}$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. On pose $\chi_{n+1} = \hat{B}_{n+1} u - u$.

- (a) Montrer que

$$\|\chi_{n+1}''\|_\infty \leq \|f - B_{n-1} f\|_\infty + \frac{1}{n+1} \|f\|_\infty + K \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

- (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que

$$\chi_{n+1}(x) = -\frac{1}{2} x(1-x) \chi_{n+1}''(\xi)$$

Indication : on pourra pour $x \in]0, 1[$ considérer la fonction

$$h(t) = \chi_{n+1}(t) - \frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)} t(1-t), \quad t \in [0, 1]$$

24. En déduire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|u - \hat{B}_{n+1} u\|_\infty \leq \frac{M}{n^{\alpha/2}}$$