

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2023

LUNDI 17 AVRIL 2023

08 h 00 - 12 h 00

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES (XUSR)

Durée: 4 heures

*L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve*

- On notera $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.
- On rappelle que si $F \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé borné et $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors le minimum de f sur F est atteint, c'est-à-dire qu'il existe $x \in F$ tel que $f(x) \leq f(y)$ pour tout $y \in F$.
- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit que $C \subset E$ est un ensemble convexe si pour tous $x, y \in C$ et tout $t \in [0, 1]$ on a $(1-t)x + ty \in C$.

Pour $C \subset E$ convexe, une fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe, si pour tous x, y éléments de C et tout $t \in [0, 1]$, on a $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$. On dit que f est strictement convexe si cette inégalité est stricte pour $t \in]0, 1[$ et $x \neq y$.

- Soient A et B deux ensembles et $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet un point selle en $(a_*, b_*) \in A \times B$ si pour tout $(a, b) \in A \times B$ on a

$$f(a_*, b) \leq f(a_*, b_*) \leq f(a, b_*).$$

- Toutes les variables aléatoires seront supposées définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Les parties I et II sont indépendantes.

I. CONVEXITÉ ET POINTS SELLES

Soient m et n deux entiers positifs non nuls et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- (1) Soient $C \subset E$ un ensemble convexe. Soient f et g deux fonctions convexes de C dans $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que $f + g$ est convexe, et strictement convexe s'il l'une des deux fonctions f ou g est strictement convexe.
 - (b) On suppose f strictement convexe. Vérifier que le minimum de f est atteint sur C en au plus un point de C .
- (2) Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de m lignes et n colonnes. On note $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^n}$ le produit scalaire entre deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ et $\langle \mu, \nu \rangle_{\mathbb{R}^m}$ celui entre deux vecteurs μ et ν de $\mathbb{R}^m$.

- (a) Montrer que pour tout $(x, \nu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, on a

$$\langle Ax, \nu \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle x, A^\top \nu \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

où $A^\top$ désigne la matrice transposée de A .

- (b) En déduire que $\ker A \subset (\operatorname{Im} A^\top)^\perp$ où $E^\perp$ désigne l'orthogonal de E pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$.
 - (c) Montrer que $\ker A = (\operatorname{Im} A^\top)^\perp$
- (3) On considère un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On suppose qu'il existe $x_* \in U$ un minimum de h sur l'ensemble $V_b = \{x \in U \mid Ax + b = 0\}$.
 - (a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Au = 0$ on a $\langle \nabla h(x_*), u \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$ où $\nabla h(x)$ désigne le gradient de h en x .
 - (b) Montrer l'existence de $\nu_* \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla h(x_*) - A^\top \nu_* = 0$.
 - (c) En déduire que l'application $L : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $L(x, \nu) = h(x) - \langle \nu, Ax + b \rangle_{\mathbb{R}^m}$ vérifie $\frac{\partial L}{\partial x_k}(x_*, \nu_*) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ où $\frac{\partial L}{\partial x_k}(x, \nu)$ désigne la dérivée partielle de L par rapport à la k -ième coordonnées de $x \in \mathbb{R}^n$.

- (d) Conclure que si U est convexe, et h convexe sur U , alors L admet un point selle en (x_*, ν_*) , c'est-à-dire que l'on a

$$L(x_*, \nu) \leq L(x_*, \nu_*) \leq L(x, \nu_*)$$

pour tout $(x, \nu) \in U \times \mathbb{R}^m$.

II. ENTROPIE ET CODAGE

Soient $\mathcal{X}$ un ensemble fini et $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_x)_{x \in \mathcal{X}}$ une loi de probabilité sur $\mathcal{X}$. On suppose que $\mathbf{p}$ charge tous les points de $\mathcal{X}$: $\mathbf{p}_x > 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$. On appelle *entropie* de $\mathbf{p}$ la quantité

$$H(\mathbf{p}) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbf{p}_x \ln(\mathbf{p}_x)$$

On considère l'ensemble $Q_{\mathcal{X}} = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_x)_{x \in \mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} \mid \forall x \in \mathcal{X}, \mathbf{q}_x \geq 0\}$. Pour tous $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in Q_{\mathcal{X}}$ tels que $\mathbf{q}'_x > 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, on définit :

$$\text{KL}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \sum_{x \in \mathcal{X}} \varphi(\mathbf{q}_x / \mathbf{q}'_x) \mathbf{q}'_x$$

avec $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x \ln(x) - x + 1$ pour $x > 0$ et prolongée en 0 par continuité.

- (4) (a) Préciser $\varphi(0)$.
 (b) Vérifier que φ est continue strictement convexe positive et que $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.
 (c) Montrer que $Q_{\mathcal{X}}$ est convexe et que $\mathbf{q} \mapsto \text{KL}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ est strictement convexe positive et s'annule ssi $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. On appelle *mot* sur $\mathcal{A}$ une suite finie d'éléments de $\mathcal{A}$, on le note $u = u_1 \dots u_n$ et n est la *longueur* du mot u , notée $|u|$. Le mot vide est noté ϵ , il est de longueur nulle. On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$ l'ensemble des mots privé du mot vide.

On définit la *concaténation* $u \cdot v$ de deux mots $u, v \in \mathcal{A}^*$ par $u \cdot \epsilon = \epsilon \cdot u = u$ et $u \cdot v = u_1 \dots u_{|u|} v_1 \dots v_{|v|}$ si $u, v \in \mathcal{A}^+$. On dit que u est un *préfixe* de v si $v = u \cdot w$ pour $w \in \mathcal{A}^*$.

Soient $\mathcal{X}$ un ensemble fini non vide et $c : \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}^+$ une application *injective*. On dira que c est un *code* binaire sur $\mathcal{X}$. On suppose de plus que c est un code préfixe, c'est-à-dire que pour tous $x \neq y$ dans $\mathcal{X}$, $c(x)$ n'est pas un préfixe de $c(y)$.

- (5) On définit $\bar{c} : \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}^*$ tel que pour tout $x \in \mathcal{X}$, $c(x) = c(x)_1 \cdot \bar{c}(x)$ où $c(x)_1$ est le premier élément du mot $c(x)$.
 (a) Vérifier que pour tout $x \neq y \in \mathcal{X}$, si $c(x)_1 = c(y)_1$ alors $\bar{c}(x) \neq \bar{c}(y)$ et $\bar{c}(x)$ n'est pas un préfixe de $\bar{c}(y)$.
 (b) Pour $a \in \{0, 1\}$ on note $\mathcal{X}_a = \{x \in \mathcal{X} \mid c(x)_1 = a\}$. Montrer que si $\mathcal{X}_a$ contient au moins deux éléments, alors la restriction de $\bar{c}$ à $\mathcal{X}_a$ est un code préfixe sur $\mathcal{X}_a$.
 (c) En déduire que $\sum_{x \in \mathcal{X}} 2^{-|c(x)|} \leq 1$. (Ind. : On pourra décomposer la somme en une somme sur $\mathcal{X}_0$ et $\mathcal{X}_1$ et raisonner par récurrence sur $L(c) = \max\{|c(x)| \mid x \in \mathcal{X}\}$.)

Soient $\mathbf{q} = (2^{-|c(x)|})_{x \in \mathcal{X}}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{X}$ de loi $\mathbf{p}$.

- (6) (a) Vérifier que $\ln(2)E(|c(X)|) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbf{p}_x \ln(\mathbf{q}_x)$.
 (b) En déduire que $E(|c(X)|) \geq \frac{H(\mathbf{p})}{\ln(2)}$.
 (Ind. : On pourra chercher à exprimer $\ln(2)E(|c(X)|)$ en fonction de $H(\mathbf{p})$ et $\text{KL}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.)

III. TRANSPORT RÉGULARISÉ

Dans toute la suite I et J désignent deux ensembles finis.

- On considère $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+^*)^I$ et $\beta = (\beta_j)_{j \in J} \in (\mathbb{R}_+^*)^J$ tels que $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} \beta_j = 1$ si bien que α et β peuvent être considérés comme définissant deux lois de probabilités sur I et J .
- Dans la suite on notera

$$Q = \{(\mathbf{q}_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \in \mathbb{R}^{I \times J} \mid \mathbf{q}_{ij} \geq 0 \text{ pour tout } (i,j) \in I \times J\}$$

et

$$F(\alpha, \beta) = \{\mathbf{q} \in Q \mid \sum_{j' \in J} \mathbf{q}_{ij'} = \alpha_i \text{ et } \sum_{i' \in I} \mathbf{q}_{i'j} = \beta_j \text{ pour tout } (i,j) \in I \times J\}.$$

On notera $\mathbf{p}$ l'élément de $F(\alpha, \beta)$ défini par $p_{ij} = \alpha_i \beta_j > 0$ pour tout $(i,j) \in I \times J$.

- (7) Vérifier que $F(\alpha, \beta)$ est un ensemble convexe de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{I \times J}$.
- (8) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires telles que X_1 est à valeurs dans I et X_2 à valeurs dans J .
 - (a) Vérifier que si $\mathbf{q} \in F(\alpha, \beta)$, alors $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mathbf{q}_{ij} = 1$.
 - (b) On suppose que $P(X_1 = i, X_2 = j) = \mathbf{q}_{ij}$ avec $\mathbf{q} \in F(\alpha, \beta)$. Calculer la loi de X_1 et celle de X_2 en fonction de α et β .
 - (c) Que dire de X_1 et X_2 lorsque $\mathbf{q} = \mathbf{p}$?

Soient $C = (C_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \in \mathbb{R}_+^{I \times J}$ et $\epsilon > 0$. On considère $J_\epsilon : Q \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J_\epsilon(\mathbf{q}) = \sum_{ij} \mathbf{q}_{ij} C_{ij} + \epsilon \text{KL}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

où $\text{KL}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est défini dans la partie précédente en prenant $\mathcal{X} = I \times J$.

- (9) Montrer que J_ϵ est strictement convexe sur Q .
- (10)
 - (a) Vérifier que $F(\alpha, \beta)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^{I \times J}$.
 - (b) Montrer qu'il existe un unique $\mathbf{q}(\epsilon) \in Q$ minimisant J_ϵ sur $F(\alpha, \beta)$.
 - (c) En considérant un contre-exemple simple, montrer que l'unicité n'est plus vraie si on suppose que $\epsilon = 0$.
- (11)
 - (a) Vérifier que $\mathbf{q}(\epsilon)_{ij} > 0$ pour tout $(i,j) \in I \times J$ (Ind: On pourra raisonner par l'absurde et considérer pour tout $t \in]0, 1[$ $\mathbf{q}(\epsilon, t) = (1-t)\mathbf{q}(\epsilon) + t\mathbf{p}$ puis observer le comportement de $\varphi(x)$ au voisinage de $x = 0$).
 - (b) Montrer que ceci n'est plus vrai si on suppose que $\epsilon = 0$.

IV. DUALITÉ

On définit $Q_{>0} = (\mathbb{R}_+^*)^{I \times J}$ et $\mathcal{L} : Q_{>0} \times (\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, (f, g)) = J_\epsilon(\mathbf{q}) + \sum_{i \in I} f_i(\alpha_i - \sum_{j \in J} \mathbf{q}_{ij}) + \sum_{j \in J} g_j(\beta_j - \sum_{i \in I} \mathbf{q}_{ij})$$

- (12)
 - (a) Vérifier que $Q_{>0}$ est un ouvert convexe $\mathbb{R}^{I \times J}$.
 - (b) Montrer qu'il existe $(f(\epsilon), g(\epsilon)) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$ tel que $\mathcal{L}(\mathbf{q}(\epsilon), (f(\epsilon), g(\epsilon)))$ est un point selle de $\mathcal{L}$. (Indication: On pourra identifier $\mathbb{R}^{I \times J}$ avec $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$ avec $\mathbb{R}^m$ pour n cardinal de $I \times J$ et m somme des cardinaux de I et J puis utiliser la question 3 de la partie I.)

- (13) (a) Montrer que pour tout $(f, g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$, le minimum de $\mathbf{q} \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{q}, (f, g))$ sur $Q_{>0}$ est atteint en $\mathbf{q}(f, g)_{ij} = e^{(f_i + g_j - C_{ij})/\epsilon} \mathbf{p}_{ij}$.
- (b) Calculer la valeur de $G(f, g) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(f, g), (f, g))$.
- (c) Vérifier que G est concave sur $\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$.
- (14) Vérifier que si $f_* : \mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R}^I$ et $g_* : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^J$ sont définies par

$$f_*(g)_i = -\epsilon \ln \left(\sum_{j \in J} e^{(g_j - C_{ij})/\epsilon} \beta_j \right) \text{ et } g_*(f)_j = -\epsilon \ln \left(\sum_{i \in I} e^{(f_i - C_{ij})/\epsilon} \alpha_i \right)$$

alors pour tout $(f, g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$, on a $\frac{\partial G}{\partial f_i}(f_*(g), g) = \frac{\partial G}{\partial g_j}(f, g_*(f)) = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$.

Soit $(f^0, g^0) \in \mathbb{R}^{I \times J}$. Pour tout $k \geq 0$, on considère

$$g^{k+1} = g_*(f^k) \text{ et } f^{k+1} = f_*(g^{k+1})$$

- (15) Montrer que la suite $(G(f^k, g^k))_{k \geq 0}$ est croissante.
- (16) On suppose qu'il existe $f^\infty = (f_i^\infty)_{i \in I}$ et $g^\infty = (g_j^\infty)_{j \in J}$ tel que $|f_i^k - f_i^\infty| \rightarrow 0$ et $|g_j^k - g_j^\infty| \rightarrow 0$ pour tous $i \in I$ et $j \in J$. On note $G_* = \sup\{G(f, g) \mid (f, g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J\}$.
- (a) Montrer que $G(f^\infty, g^\infty) = G_*$.
- (b) Montrer que $G(f(\epsilon), g(\epsilon)) = G_*$.
- (c) Montrer qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle $f(\epsilon)_i = f_i^\infty + a$ et $g(\epsilon)_j = g_j^\infty - a$ pour tout $(i, j) \in I \times J$.
- (d) En déduire que $\mathbf{q}(f^k, g^k) \rightarrow \mathbf{q}(\epsilon)$.