

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES**

CONCOURS D'ADMISSION 2020

MERCREDI 22 AVRIL 2020 - 08h00 – 12h00

FILIÈRE PC - Épreuve n°5

**PHYSIQUE B
(XEULC)**

Durée : 4 heures

L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Ondes de gravité dans un fluide

Des ondes de gravité peuvent apparaître au sein d'un fluide stratifié, c'est-à-dire un fluide dont la masse volumique varie spatialement selon une direction particulière, généralement la verticale. Elles sont appelées ondes internes. Des ondes peuvent également apparaître à l'interface entre deux fluides de masses volumiques différentes et non miscibles. Elles sont dites ondes de surface. Les vagues à la surface d'un océan en sont une manifestation. Notons qu'il s'agit là d'une situation limite de la précédente.

Cette étude comprend deux parties qui peuvent être abordées de façon indépendante. La première s'intéresse aux ondes à l'interface eau/air, la seconde est consacrée aux ondes internes dans l'eau. Nous définissons le référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, supposé galiléen, tel que le champ de gravité s'exprime $\vec{g} = -g\vec{u}_y$. Nous restreindrons ces études à des situations spatialement bidimensionnelles, dans le plan vertical (O, x, y) .

En vue des applications numériques nous adoptons les valeurs suivantes : $D = 15 \text{ cm}$, $L = 15 \text{ cm}$ et $H = 20 \text{ cm}$. Ces grandeurs seront introduites et présentées dans la suite.

N.B. : Nous considérerons que le principe (ou théorème) d'ARCHIMÈDE reste applicable hors du domaine de la stricte statique des fluides.

1 Ondes de surface.

Reportons-nous à la figure (1). Nous considérons un objet cylindrique, de masse volumique ρ_c uniforme, de diamètre $D = 2R$ et de longueur L , flottant à la surface de l'eau de masse volumique ρ . Cette eau est contenue dans un canal de largeur très légèrement supérieure à L (mais considérée égale à L), de profondeur H et de longueur très supérieure à toutes les longueurs caractéristiques du système. L'origine O du repère est placée au niveau de la surface de l'eau. Nous notons Y l'ordonnée du centre de masse G du flotteur et $u = Y - Y_0$ son écart par rapport à son ordonnée d'équilibre Y_0 (fluide et flotteur à l'équilibre). Nous nous placerons toujours dans le cas où l'axe du flotteur reste parallèle à l'axe (Oz) et tel que $|u| \ll R$. Nous négligerons l'action de l'air sur le flotteur.

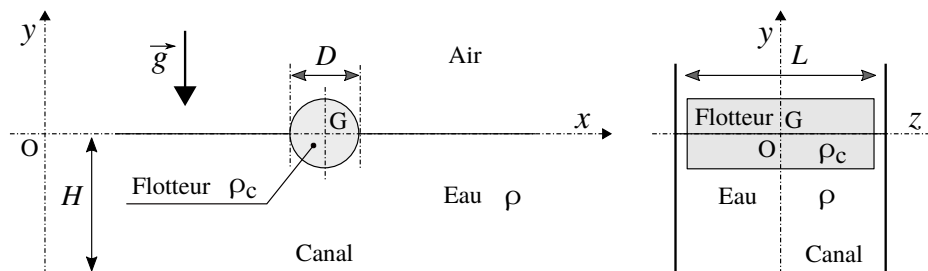


FIGURE 1 – Objet cylindrique (ρ_c, D, L) flottant horizontalement à la surface de l'eau (ρ) d'un canal (vues de face et de côté). Ces figures ne sont pas à l'échelle. En particulier, la largeur du canal n'est que très légèrement supérieure à L (l'écart est exagéré sur le schéma afin de le rendre visible).

1. Nous souhaitons que le cylindre flotte, à l'équilibre, en étant à moitié immergé dans l'eau. Préciser la relation que doit alors vérifier ρ_c . Calculer sa valeur numérique.

Nous nous placerons dans cette situation dans toute cette partie.

- Nous supposons que l'équilibre du flotteur a été légèrement perturbé (verticalement) et souhaitons exprimer la pulsation ω_0 de ses oscillations libres. Nous négligerons ici toute cause de dissipation d'énergie mécanique et nous nous placerons dans le cas où le fond du canal n'influence pas le mouvement du flotteur.

2. Sur la base de considérations physiques et d'arguments dimensionnels, établir la dépendance de ω_0^2 avec les différents paramètres du problème. On détaillera chaque étape du raisonnement.
3. Exprimer, au premier ordre relativement au rapport u/R et en fonction de L , D et u , la variation algébrique δV_{im} de volume immergé du flotteur par rapport à la situation d'équilibre.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par la variable u . On fera apparaître la pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de g et D .

5. Calculer la valeur numérique de la fréquence f_0 correspondant à ω_0 .

- La figure (2) représente l'évolution temporelle de l'ordonnée Y du centre de masse G du flotteur, obtenue expérimentalement.

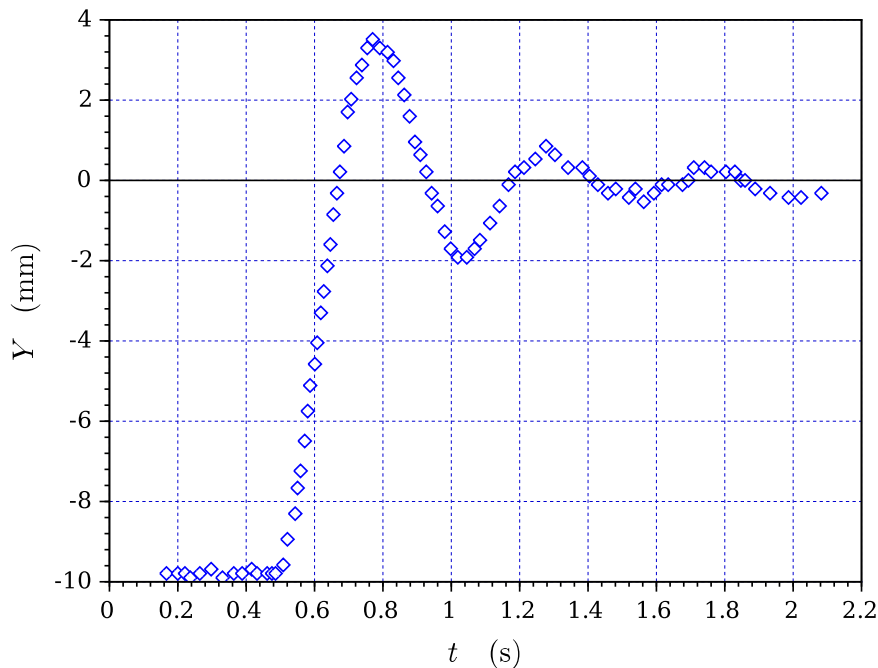


FIGURE 2 – Évolution temporelle expérimentale de l'ordonnée Y du centre de masse G du flotteur.

- Déterminer, à partir de la figure (2), la pseudo-fréquence f_{exp} des oscillations du flotteur ainsi que l'amplitude initiale u_0 . Proposer une estimation (approximative) du facteur de qualité Q de cet oscillateur (en précisant la méthode adoptée).
- Comparer à f_0 la pseudo-fréquence f_{exp} des oscillations du flotteur estimée à partir de la figure (2).

• Nous souhaitons maintenant identifier les effets responsables de l'amortissement des oscillations du flotteur. Nous commençons par l'effet de traînée.

- Préciser, sur la base d'une argumentation, l'expression du nombre de REYNOLDS Re qu'il convient d'associer à l'écoulement de l'eau autour du flotteur en mouvement. En donner une estimation (nous adopterons, pour la viscosité cinématique de l'eau, la valeur $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$). Commenter ce résultat.
- Donner l'expression de la force de traînée $\vec{F}_T$ qui paraît alors la mieux adaptée à décrire l'action mécanique du fluide sur le flotteur en mouvement (toujours transversalement à son axe) à la vitesse $\vec{V} = V \vec{u}_y$. On raisonnera comme si le cylindre était totalement immergé dans un milieu infini et on s'inspirera du résultat connu relatif à un objet sphérique.
- Exprimer, à partir de grandeurs caractéristiques que l'on précisera, le rapport caractéristique K_{TR} de la force de traînée à la force de rappel gravitationnel qui est intervenue en question (4) lors de l'établissement de l'équation différentielle.
- Estimer numériquement le rapport K_{TR} . Conclure sur la participation de l'effet de traînée à l'amortissement des oscillations du flotteur.

• Nous recherchons maintenant la cause de l'amortissement des oscillations du flotteur dans les ondes de surface qu'elles génèrent. L'image inférieure de la figure (3) est une chronophotographie permettant de donner une représentation de l'évolution temporelle de la surface libre eau/air. Pour cela on réalise un film du canal à raison de 250 images par seconde, pendant 3 s. Pour chaque image (telle que celle du haut de la figure (3)), on stocke l'état de couleur de

60 chacun des pixels correspondant à une ligne horizontale prédéterminée (en pratique, située très légèrement en dessous de l'interface libre eau/air au repos [ligne en trait pointillé sur la figure du haut]). Ces lignes de pixels sont ensuite représentées les unes en dessous des autres en respectant la chronologie de la prise d'images (figure du bas). Cette chronophotographie se rapporte à l'expérience relative à l'évolution représentée sur la figure (2).

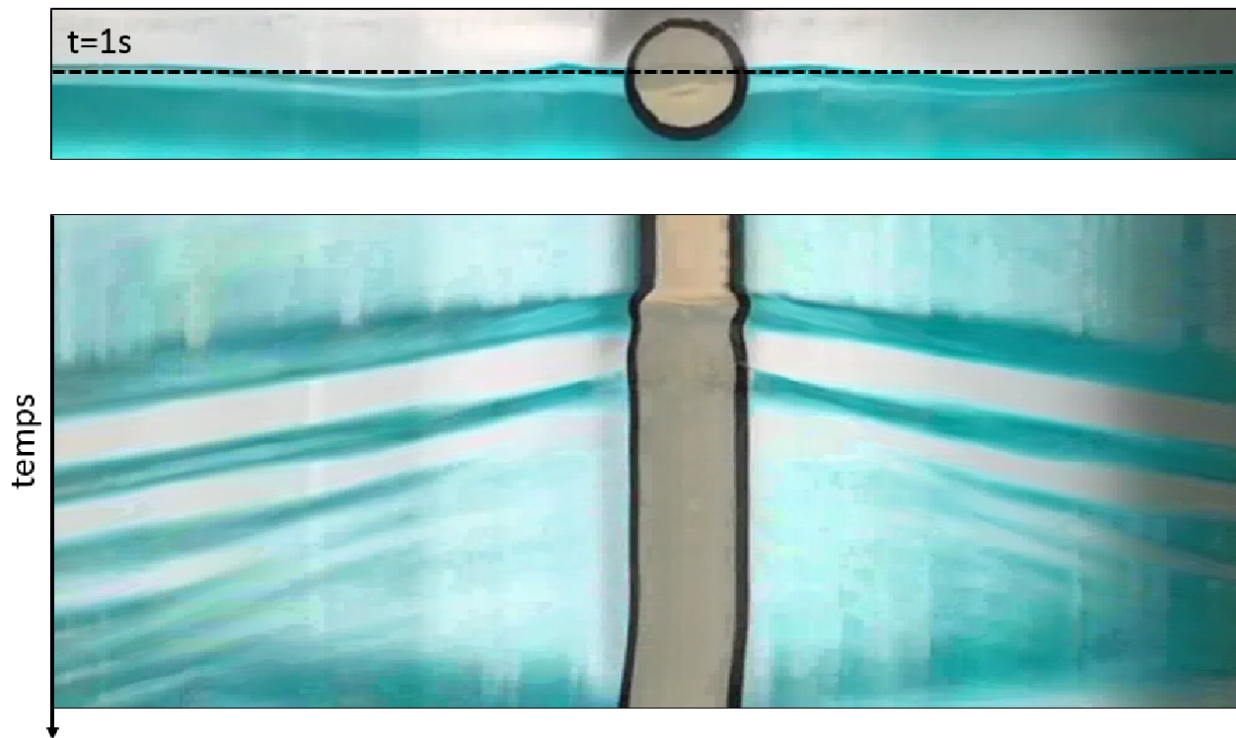


FIGURE 3 – Chronophotographie illustrant l'évolution de l'interface eau/air (cadence de 250 images par seconde sur une durée de 3 s). La ligne horizontale en trait pointillé tracée sur la photographie du haut représente la ligne des pixels suivis temporellement et qui est reportée chronologiquement, de haut en bas, pour former l'image du bas.

- 65
12. Proposer une interprétation des lignes obliques situées de part et d'autre de la frange sombre verticale et centrale (trace du flotteur).
 13. Déterminer, à partir de cette chronophotographie, la fréquence f'_{exp} des oscillations du flotteur. On précisera la démarche suivie.
 14. De la même manière, déterminer la longueur d'onde λ_{exp} des ondes de surface.
 15. Estimer la célérité c_{exp} de ces ondes de surface.

• Nous admettons que la relation de dispersion liant la pulsation ω ($\omega \geq 0$) au nombre d'onde k des ondes de surface se propageant dans un canal de profondeur H est donnée par la relation :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH) \quad \text{où} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} > 0 \quad \text{et} \quad \tanh(kH) = \frac{\sinh(kH)}{\cosh(kH)} = \frac{\exp(2kH) - 1}{\exp(2kH) + 1} \quad (1)$$

- 70
16. Représenter l'allure graphique de la fonction $\omega = \omega(k)$. On précisera ses comportements limite et asymptotique.
 17. Indiquer à quelle condition le milieu peut être considéré comme non dispersif.
 18. Associer la célérité c_{exp} calculée à la question (15) à l'une des vitesses de groupe ou de phase.
 19. Dédire de la relation (1), dans la limite $kH \ll 1$, l'expression de la célérité c des ondes de surface. Calculer sa valeur numérique. Vérifier la compatibilité de cette valeur avec celle de c_{exp} déterminée en réponse à la question (15).
- 75

- Nous décrivons l'évolution spatio-temporelle de la hauteur (algébrique) h des vagues formant l'onde de surface par l'équation :

$$h(x, t) = A \sin(\Omega_0 t \pm kx) \quad (A = \text{Cste} \in \mathbb{R}_+ ; \Omega_0 \in \mathbb{R}_+ ; k \in \mathbb{R}_+) \quad (2)$$

N.B. : En réalité, l'amplitude A dépend du temps (amortissement des oscillations du flotteur excitant les ondes de surface) et de l'espace (amortissement des ondes de surface). Nous considérerons ici simplement que cette amplitude ne varie pas (sensiblement) sur l'échelle d'une période ni sur celle d'une longueur d'onde. En pratique, sauf à la question (23), nous considérerons donc l'amplitude A comme constante et uniforme.

80 Nous adoptons comme état de référence, notamment pour ce qui concerne les énergies, la situation correspondant à une interface plane et immobile. Par ailleurs, nous considérons que nous pouvons nous placer dans la limite des faibles profondeurs ($kH \ll 1$). Nous notons c la célérité des ondes de surface.

20. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = E_p(\rho, g, L, A, \lambda)$ emmagasinée par l'onde, sur une étendue spatiale (selon (Ox)) égale à une longueur d'onde. Rappelons que la largeur de la cuve (égale à la longueur du flotteur) est notée L . 85
21. En déduire l'expression du flux (moyen) d'énergie potentielle $\Phi_p = \Phi_p(\rho, g, L, A, c)$ ($[\Phi_p] = W$) traversant une section verticale d'abscisse donnée.
22. Nous cherchons d'abord à relier l'amplitude A des ondes à l'amplitude B ($B \geq 0$) des oscillations du flotteur. Nous considérons alors que le volume total des bosses (occupant chacune une demie longueur d'onde) des ondes se formant de part et d'autre du flotteur est égal à celui balayé par le flotteur sur une demie période. Dans cette démarche nous considérons que le flotteur oscille à amplitude constante sur l'échelle d'une période (hypothèse jumelle de celle adjointe à l'équation (2)). 90

Exprimer, dans ces conditions, l'amplitude A en fonction de B , D et λ .

23. En reliant la variation d'énergie par unité de temps du flotteur au flux Φ_p qu'il rayonne par le biais des ondes de surface, établir que l'amplitude B de ses oscillations vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{B} + \frac{B}{\tau} = 0 \quad (3)$$

On explicitera la dépendance de la constante τ avec le diamètre D , la célérité c et la longueur d'onde λ .

24. Déduire du résultat précédent l'expression du facteur de qualité Q du système oscillant. On exprimera Q en fonction de la célérité c des ondes, de la période T des oscillations et du diamètre D du cylindre. 95
25. Estimer la valeur de ce facteur de qualité. Analyser ce résultat.

2 Ondes internes.

La masse volumique de l'eau varie en fonction de la salinité, de la température et de la pression, ce qui conduit généralement à une stratification verticale du milieu océanique. Nous considérons ici que la masse volumique ρ_0 du milieu, en situation d'équilibre, varie selon la relation :

$$\rho_0(y) = \rho_0(0) - \bar{\rho} \frac{y}{\ell} \quad (4)$$

La grandeur $\bar{\rho}$ représente la masse volumique moyenne (selon la verticale) et la grandeur $\rho_0(0)$ celle correspondant au fond océanique ($y = 0$). La longueur caractéristique ℓ est de l'ordre de 10^7 m. Le plan (O, z, x) du référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ est placé au niveau du fond océanique (se reporter à la figure (4)). Enfin, nous négligerons toute cause de dissipation de l'énergie mécanique. 100

Le traitement de la sous-partie suivante (questions (26), (27) et (28)) n'est pas indispensable à la suite de l'étude.

- Un cylindre homogène de centre de masse G , de diamètre $D = 2R$, de longueur $L = D$ et de masse volumique ρ_c (de valeur *a priori* différente de celle prise en partie (1)) trouve son équilibre, entre deux eaux, à une altitude Y_0 . Nous notons $Y = Y_0 + u$ l'ordonnée de son centre de masse G , la variable u représentant l'écart à sa position d'équilibre. Nous supposons que son axe reste en permanence parallèle à l'axe (Oz) . Ce système est représenté sur la figure (4). 105

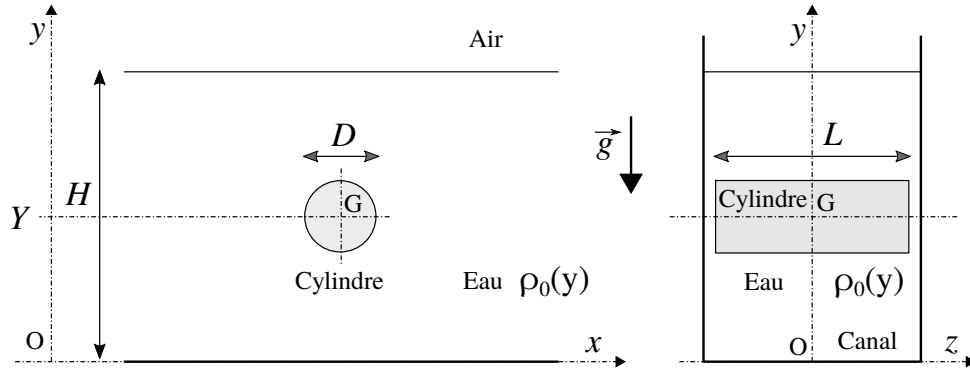


FIGURE 4 – Objet cylindrique (ρ_c, D, L) immergé dans l'eau $(\rho_0(y))$. Ces figures ne sont pas à l'échelle. En particulier, la largeur du canal n'est que très légèrement supérieure à L (l'écart est exagéré sur le schéma afin de le rendre visible).

26. Établir l'équation algébrique satisfaite par l'ordonnée Y_0 ainsi que l'équation différentielle vérifiée par la variable u . On fera apparaître la pulsation propre Ω_0 ($\Omega_0 > 0$) des oscillations du cylindre que l'on exprimera en fonction des grandeurs g , ℓ , $\bar{\rho}$ et ρ_c . On considérera que l'action du fluide sur le cylindre est traduite simplement par la poussée d'ARCHIMÈDE.

Il sera avantageux de noter que la masse volumique de l'eau varie de façon affine avec l'altitude y .

27. Dans le cas où $Y_0 = H/2$, exprimer Ω_0^2 en fonction de g et ℓ .
28. Calculer la valeur de la période T_0 associée à Ω_0 .

• Nous étudions maintenant la propagation des ondes internes dans le milieu océanique stratifié. Nous imaginons que ces ondes sont excitées à la pulsation ω , par exemple par les oscillations verticales imposées à l'objet cylindrique immergé représenté figure (4). Dans la situation de référence, qui correspond à l'océan au repos, la vitesse du fluide est uniformément nulle et sa masse volumique varie selon la relation (4). L'excitation entraîne des variations de vitesse qui s'accompagnent de variations de la masse volumique et de la pression du fluide, par rapport à la situation de référence. Nous notons les champs correspondants de vitesse, de masse volumique et de pression, réponses à cette excitation, sous la forme :

$$\begin{cases} \delta \vec{v}(x, y, t) = \delta v_x(x, y, t) \vec{u}_x + \delta v_y(x, y, t) \vec{u}_y \\ \rho(x, y, t) = \rho_0(y) + \delta \rho(x, y, t) \\ P(x, y, t) = P_0(y) + \delta P(x, y, t) \end{cases} \quad (5)$$

L'indice "0" se rapporte à la situation de référence. Nous recherchons chacune de ces variations sous la forme d'ondes planes harmoniques que nous écrivons en représentation complexe :

$$\delta \psi = A_\psi \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)] \quad (A_\psi \in \mathbb{C}, \omega \geq 0, k_x \in \mathbb{R}, k_y \in \mathbb{R}) \quad (6)$$

Enfin, nous considérons l'écoulement du fluide comme incompressible et parfait.

29. Représenter, sur un schéma, dans le cas où $k_x = 2k_y > 0$, la direction de propagation $\vec{u}$ de l'onde. Faire ensuite apparaître les longueurs d'onde λ_x et λ_y en précisant comment elles sont obtenues.

• Nous admettons que les fonctions variations $\delta \psi$ sont solutions du système d'équations différentielles linéaires (au premier ordre par rapport à chacune des fonctions $\delta \psi$) :

$$\begin{cases} (1) \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial y} = 0 \\ (2) \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = 0 \\ (3) \bar{\rho} \frac{\partial \delta v_x}{\partial t} = - \frac{\partial \delta P}{\partial x} \\ (4) \bar{\rho} \frac{\partial \delta v_y}{\partial t} = - \frac{\partial \delta P}{\partial y} - g \delta \rho \end{cases} \quad (7)$$

30. Préciser ce que traduit chacune de ces équations.

31. Introduire, dans le système différentiel (7), les fonctions sous leur forme donnée par l'équation (6) afin d'établir un système linéaire d'équations algébriques vérifié par les amplitudes complexes de ces fonctions.

32. Dédurre de ce système d'équations la relation de dispersion liant ω , k_x et k_y . Vérifier qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\omega^2 (k_x^2 + k_y^2) = \alpha^2 k_x^2 \quad (8)$$

où α est une constante positive, propre au milieu stratifié, que l'on exprimera en fonction des grandeurs g et ℓ .

33. Écrire cette relation de dispersion en faisant apparaître l'angle θ que forme le vecteur d'onde $\vec{k}$ avec l'axe horizontal (Ox).

34. Analyser cette relation de dispersion. On s'interrogera notamment sur la façon dont le vecteur d'onde $\vec{k}$ est lié à la pulsation d'excitation ω .

35. Exprimer, en faisant apparaître les composantes k_x et k_y , la vitesse de phase $\vec{V}_\phi$ de ces ondes. Rappelons que cette vitesse est celle des plans de phase.

36. Exprimer, en faisant apparaître les composantes k_x et k_y , la vitesse de groupe $\vec{V}_g$ de ces ondes. Nous admettrons que chacune de ses composantes s'exprime de la même manière que dans le cas unidimensionnel, mais avec la composante correspondante du vecteur d'onde.

Cette vitesse est celle de propagation de l'énergie. Elle définit une direction orientée qui est l'analogue de ce que représente un rayon lumineux en optique.

37. Établir que les vitesses de phase et de groupe sont orthogonales. Établir que leurs composantes selon l'axe (Ox) sont de même signe. En s'appuyant sur la première équation du système (7), montrer que la vitesse $\delta\vec{v}$ est orthogonale au vecteur d'onde $\vec{k}$.

38. Représenter, sur un schéma, la vitesse de groupe, la vitesse de phase ainsi que la direction de la vitesse $\delta\vec{v}$, dans le cas où $k_x = 2k_y > 0$.

• La figure (5) représente une cartographie¹ spatiale instantanée du champ $\partial\delta\rho/\partial y$, en régime établi. La valeur va croissant depuis la couleur bleue (négatif intense) vers la couleur rouge (positif intense) en passant par le niveau zéro en jaune-vert. Dans cette expérience, le milieu est linéairement stratifié et tel que la longueur ℓ introduite dans la présentation de la partie (2) est égale à 12 m. Ce milieu est excité harmoniquement à la pulsation ω par les oscillations verticales imposées à un cylindre d'axe perpendiculaire au plan de la figure. Ce cylindre est situé au centre de la figure.

39. Commenter cette cartographie. Le champ représenté peut-il être décrit par une unique onde plane (une argumentation est attendue) ?

40. Estimer, à partir de la cartographie représentée figure (5), la valeur de la pulsation excitatrice ω .

41. Les ondes internes peuvent interagir avec le relief sous-marin et subir des réflexions. Représenter, sur un schéma (inspiré de la figure (6)), le vecteur d'onde et la vitesse de groupe (orientant l'équivalent du rayon lumineux) d'une onde, avant puis après sa réflexion sur une paroi verticale. Le vecteur d'onde incident est tel que $k_x = 2k_y > 0$. Nous admettrons que l'onde réfléchie vérifie la relation de dispersion de l'onde incidente.

1. Pour réaliser cette cartographie on place une grille derrière la cuve et on photographie son image vue depuis le devant de la cuve, cylindre et fluide étant au repos. On photographie ensuite à nouveau cette grille, à un instant donné, lorsque les oscillations sont établies. C'est à partir de la comparaison de ces deux photographies que l'on accède au gradient de masse volumique, *via* le gradient d'indice optique qu'il induit.

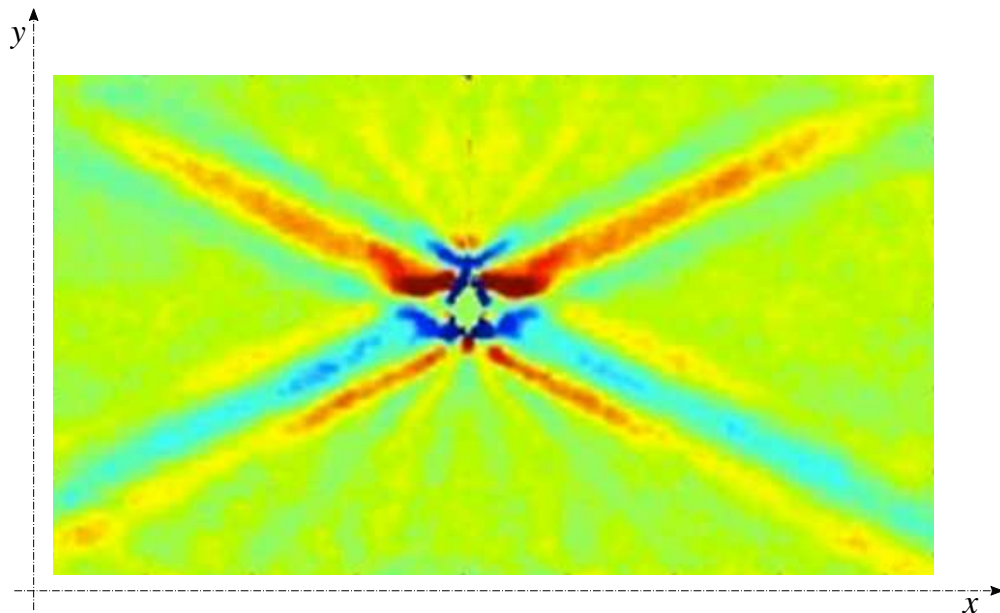


FIGURE 5 – Cartographie spatiale instantanée du champ $\partial\delta p/\partial y$ d'un milieu verticalement et linéairement stratifié ($\ell = 12$ m), excité par les oscillations verticales (ω) d'un cylindre (situé au centre de la figure). La valeur est codée par la couleur allant du bleu (négatif extrême) au rouge (positif extrême).

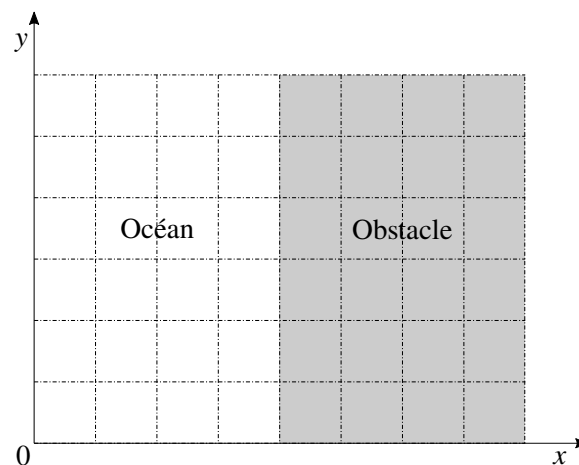


FIGURE 6 – Relief sous-marin formant une falaise verticale.

42. Le vecteur d'onde incident est toujours tel que $k_x = 2k_y > 0$ mais le plan représentant la paroi sous-marine a maintenant pour équation cartésienne $y - 2x = \text{Cste}$. Représenter, sur un schéma inspiré de la figure (6) et adapté à cette nouvelle situation, deux rayons voisins parallèles incidents puis réfléchis (rappelons encore qu'un "rayon" est orienté par la vitesse de groupe). Analyser cette situation d'un point de vue énergétique.