

UPS

avril 2017

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du concours X-ESPCI-ENS

Question 1.a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $C > 0$.

On fait l'hypothèse $\|M\| \leq C$, c'est-à-dire $\sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$.

Pour tout x non nul de $\mathbb{C}^n$, on a donc la majoration $\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$. On multiplie par $\|x\|_1$, qui est positif, ce qui donne $\|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$.

Cette inégalité est également valable si x est nul.

Réciproquement, on fait l'hypothèse $\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$.

Pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{C}^n$, on en déduit l'inégalité $\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$ car $\|x\|_1 > 0$, donc $\|M\| \leq C$.

On a prouvé l'équivalence $\|M\| \leq C \iff \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$.

Au final, remarquons qu'on a prouvé en particulier l'inégalité $\|Mx\|_1 \leq \|M\| \times \|x\|_1$ et qu'on possède une méthode pour majorer $\|M\|$ dans le cas général. Ces deux points serviront fréquemment dans ce qui suit.

Question 1.b. [1] Déjà, la fonction $M \mapsto \|M\|$ est à valeurs réelles positives.

[2] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\|M\| = 0$. À la question précédente, on n'a pas utilisé le caractère strict de l'inégalité $C > 0$. On peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq 0.$$

Par positivité de la norme, on obtient donc $\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 = 0$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{C}^n : Mx = 0$. Les colonnes de la matrice M sont les produits Me_i , où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, les colonnes de M sont nulles donc M est la matrice nulle.

[3] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Exploitions l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|_1$.

$$\|\lambda Mx\|_1 = |\lambda| \times \|Mx\|_1 \leq |\lambda| \times \|M\| \times \|x\|_1.$$

On en déduit la majoration $\|\lambda M\| \leq |\lambda| \times \|M\|$ d'après 1.a.

Si $\lambda = 0$, on obtient $\|\lambda M\| \leq 0$ donc $\|\lambda M\| = 0 = |\lambda| \times \|M\|$.

Si $\lambda \neq 0$, on effectue la substitution $(M, \lambda) \leftarrow (\lambda M, 1/\lambda)$ dans l'inégalité $\|\lambda M\| \leq |\lambda| \times \|M\|$, pour obtenir $\|M\| \leq \|\lambda M\|/|\lambda|$, c'est-à-dire $\|\lambda M\| \geq |\lambda| \times \|M\|$.

On obtient donc $\|\lambda M\| = |\lambda| \times \|M\|$ dans tous les cas.

Remarque. Ce raisonnement est encore valable si on prend λ dans $\mathbb{C}$. Ce n'est pas requis par la définition d'une norme mais cette extension est utile plus loin (à la question 8).

[4] Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_1$ donne

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|(M+N)x\|_1 \leq \|Mx\|_1 + \|Nx\|_1 \leq \|M\| \times \|x\|_1 + \|N\| \times \|x\|_1.$$

On en déduit l'inégalité $\|M + N\| \leq \|M\| + \|N\|$ par application de 1.a.

On a montré que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Question 2. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En appliquant 1.a dans le sens $\Rightarrow$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|(AB)x\|_1 \leq \|A\| \times \|Bx\|_1 \leq \|A\| \times \|B\| \times \|x\|_1.$$

En appliquant 1.a dans le sens $\Leftarrow$, on en déduit l'inégalité $\|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Question 3. Posons $S(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$ et notons j_0 un indice qui réalise ce maximum.

En notant de nouveau $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on observe l'égalité

$$Ae_{j_0} = \begin{pmatrix} a_{1,j_0} \\ \vdots \\ a_{n,j_0} \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad S(A) = \|Ae_{j_0}\|_1.$$

L'égalité $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ donne alors $S(A) = \frac{\|Ae_{j_0}\|_1}{\|e_{j_0}\|_1} \leq \|A\|$.

Pour l'inégalité réciproque, prenons x quelconque dans $\mathbb{C}^n$.

$$Ax = A \times \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n x_j \times Ae_j.$$

L'inégalité triangulaire de la norme $\| \cdot \|_1$ donne alors

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \times \|Ae_j\|_1.$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on observe les relations

$$\|Ae_j\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq S(A)$$

donc

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \times S(A) = S(A) \times \|x\|_1.$$

D'après 1.a, on en déduit la majoration $\|A\| \leq S(A)$.

Par double inégalité, on a prouvé l'égalité $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$.

Question 4. C'est éternel : on nous demande de prouver une propriété du cours.

[1] On commence par supposer que la suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice B . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on remarque l'encadrement

$$0 \leq \|A^{(k)} - B\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}|.$$

Chaque terme du membre de droite tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ donc, par le théorème des gendarmes, on voit que $\|A^{(k)} - B\|$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

[2] Réciproquement, on suppose que $\|A^{(k)} - B\|$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe l'encadrement

$$0 \leq |a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}| \leq \sum_{s=1}^n |a_{s,j}^{(k)} - b_{s,j}| \leq \|A^{(k)} - B\|.$$

On en déduit que $a_{i,j}^{(k)}$ tend vers $b_{i,j}$ quand k tend vers $+\infty$. Ainsi, la suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice B .

Question 5.a. Le calcul donne

$$P_b^{-1}AP_b = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ba_{1,2} & b^2a_{1,3} & \cdots & b^{n-1}a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & ba_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b^2a_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & ba_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $P_b^{-1}AP_b$ tend vers la matrice $\text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ quand b tend vers 0.

Question 5.b. La norme $\|\cdot\|$ est une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ (car elle est 1-lipschitzienne). On en déduit que $\|P_b^{-1}AP_b\|$ tend vers $\|\text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})\|$ quand b tend vers 0. Cette limite, notée ℓ , est égale à $\max(|a_{j,j}|; 1 \leq j \leq n)$.

Cette limite est strictement inférieure à 1 par hypothèse. Notons $r = (1 + \ell)/2$, ce qui est dans $] \ell, 1[$.

D'après la définition de la limite, il existe $b_0 > 0$ tel que pour tout b dans $]0, b_0]$, le nombre $\|P_b^{-1}AP_b\|$ soit majoré par r . On obtient donc en particulier l'inégalité $\|P_{b_0}^{-1}AP_{b_0}\| < 1$.

Question 5.c. Gardons la notation b de la question précédente. Une itération de l'inégalité de la question 2 donne

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \|(P_b^{-1}AP_b)^k\| \leq \|P_b^{-1}AP_b\|^k.$$

L'inégalité $\|P_b^{-1}AP_b\| < 1$ donne que $\|P_b^{-1}AP_b\|^k$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Rappelons l'identité $(P_b^{-1}AP_b)^k = P_b^{-1}A^kP_b$. L'inégalité de la question 2 donne maintenant

$$0 \leq \|A^k\| \leq \|P_b\| \times \|(P_b^{-1}AP_b)^k\| \times \|P_b^{-1}\|,$$

si bien que $\|A^k\|$ tend également vers 0.

La suite de matrices $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

Question 6. Pour la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $\text{Sp}(A_1) = \{0; 1\}$ donc $\rho(A_1) = 1$.

Pour la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\text{Sp}(A_2) = \{0\}$ donc $\rho(A_2) = 0$.

Pour la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\text{Sp}(A_3) = \{0; 1\}$ donc $\rho(A_3) = 1$.

Pour la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\text{Sp}(A_4) = \{i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}\}$ donc $\rho(A_4) = \sqrt{2}$.

Pour la matrice $A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on trouve $\text{Sp}(A_5) = \{1; 4\}$ donc $\rho(A_5) = 4$.

Question 7. La propriété (i) est vraie en raison de l'égalité

$$\mathrm{Sp}(\mu A) = \{\mu x ; x \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

Pour prouver cette égalité, on remarque pour commencer l'égalité $\mathrm{Sp}(0 \times A) = \{0\}$ puis, si $\mu \neq 0$, on remarque l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\mu A - \mu x I_n) = \mathrm{Ker}(A - x I_n), \quad \text{qui donne} \quad \mu x \in \mathrm{Sp}(\mu A) \iff x \in \mathrm{Sp}(A).$$

La propriété (ii) est fausse. On peut prendre $A = A_2$ et $B = {}^t A_2$, ce qui donne $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, on a donc $\rho(A + B) = 1$ et $\rho(A) + \rho(B) = 0$ donc $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$.

La propriété (iii) est fausse. On peut prendre $A = A_2$ et $B = {}^t A_2$, ce qui donne $AB = A_1$.

Dans ce cas, on a donc $\rho(AB) = 1$ et $\rho(A)\rho(B) = 0$ donc $\rho(AB) > \rho(A)\rho(B)$.

Les propriétés (iv) et (v) sont vraies car les matrices $P^{-1}AP$ et ${}^t A$ ont le même spectre que A .

Question 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Les relations $Ax = \lambda x$ et $x \neq 0$ donnent

$$|\lambda| = \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$

donc $\boxed{\rho(A) \leq \|A\|}$.

Question 9. On fait l'hypothèse $\rho(A) < 1$. La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$) donc il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A donc leurs modules sont strictement inférieurs à 1.

La matrice T vérifie donc les hypothèses de la question 5, si bien que la suite de matrices $(T^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

Par le même raisonnement qu'en 5.c, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (A^k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers la matrice nulle.}}$

Question 10.a. On reprend le raisonnement de la question 8 : soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On trouve

$$A^k x = A^{k-1} \lambda x = A^{k-2} \lambda^2 x = \dots = \lambda^k x$$

puis, le vecteur x étant non nul, on obtient $|\lambda^k| = \|A^k x\|_1 / \|x\|_1$ donc $\rho(A)^k \leq \|A^k\|$.

Question 10.b. $\boxed{1}$ Soit $\alpha \in]0, \rho(A)]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on observe alors l'inégalité

$$\left\| \left(\frac{A}{\alpha} \right)^k \right\| = \frac{\|A\|^k}{\alpha^k} \geq \left(\frac{\rho(A)}{\alpha} \right)^k \geq 1$$

d'après 10.a.

On en déduit que $\|(A/\alpha)^k\|$ ne tend vers pas 0 quand k tend vers $+\infty$ donc α n'est pas dans E_A .

$\boxed{2}$ Soit $\alpha \in]\rho(A), +\infty[$. L'identité 7.i donne $\rho(A/\alpha) = \rho(A)/\alpha < 1$ donc la suite $((A/\alpha)^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle d'après le résultat de la question 9, si bien que α est dans E_A .

$\boxed{\text{On a prouvé l'égalité } E_A =]\rho(A), +\infty[.}$

Question 11. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on connaît l'inégalité $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$, qui découle de 10.a.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 10.b, la suite de matrices de terme général $\left(\frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}\right)^k$ tend vers la matrice nulle. Il existe donc un entier $k_\varepsilon \geq 1$ tel que

$$\forall k \geq k_\varepsilon, \quad \left\| \frac{A^k}{(\rho(A) + \varepsilon)^k} \right\| \leq 1,$$

ce qui donne ensuite $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Récapitulons :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geq k_\varepsilon, \quad \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

On a prouvé que la suite $(\|A^k\|^{1/k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\rho(A)$.

Question 12. Introduisons les coefficients des matrices en présence

$$A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{et} \quad A_+^k = (b_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, notons I_k l'énoncé

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad |a_{i,j}^{(k)}| \leq b_{i,j}^{(k)}.$$

L'énoncé I_1 est vrai par définition des $b_{i,j}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'énoncé I_k est vrai. Soit (i, j) un couple d'indices entre 1 et n . La formule du produit matriciel donne

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} a_{\ell,j}^{(k)}.$$

On applique l'inégalité triangulaire puis on utilise l'hypothèse I_k .

$$|a_{i,j}^{(k+1)}| \leq \sum_{\ell=1}^n \underbrace{|a_{i,\ell}|}_{=b_{i,\ell}} \underbrace{|a_{\ell,j}^{(k)}|}_{\leq b_{\ell,j}^{(k)}} \leq \sum_{\ell=1}^n b_{i,\ell} b_{\ell,j}^{(k)} = b_{i,j}^{(k+1)}.$$

L'énoncé I_{k+1} est prouvé.

Par récurrence, l'énoncé I_k est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Prenons maintenant k quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et considérons un indice j tel que $\|A^k\| = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}^{(k)}|$. L'énoncé I_k donne

$$\|A^k\| \leq \sum_{i=1}^n b_{i,j}^{(k)} \leq \|A_+^k\| \quad \text{puis} \quad \|A^k\|^{1/k} \leq \|A_+^k\|^{1/k}.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient l'inégalité $\rho(A) \leq \rho(A_+)$.

Question 13. Encore un raisonnement par récurrence. Pour tout entier $k \geq 2$, notons J_k l'énoncé « Pour tout $(z_1, \dots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ qui vérifie l'égalité $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$, le vecteur $(z_1, \dots, z_n)$ est colinéaire à $(|z_1|, \dots, |z_n|)$. »

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Notons $r_1 = |z_1|$ et $r_2 = |z_2|$ et introduisons θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{et} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Le calcul donne $|z_1 + z_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$ et $(|z_1| + |z_2|)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2$. On en déduit que le produit $r_1r_2(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)) = 0$ est nul.

Si $r_1 = 0$, on a alors $(z_1, z_2) = e^{i\theta_2}(|z_1|, |z_2|)$.

Si $r_2 = 0$, on a alors $(z_1, z_2) = e^{i\theta_1}(|z_1|, |z_2|)$.

Si $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$, alors θ_1 et θ_2 sont congrus modulo 2π donc $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ donc $(z_1, z_2) = e^{i\theta_1}(|z_1|, |z_2|)$.

L'énoncé J_2 est prouvé.

Soit $k \geq 2$ pour lequel J_k est vrai. Prenons $(z_1, \dots, z_{n+1})$ tel que $|z_1 + \dots + z_{k+1}| = |z_1| + \dots + |z_{k+1}|$.

Supposons dans un premier temps que z_{k+1} est nul, ce qui donne $|z_1 + \dots + z_k| = |z_1| + \dots + |z_k|$. L'hypothèse J_k donne alors l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(z_1, \dots, z_k) = \lambda(|z_1|, \dots, |z_k|)$. La nullité de z_{k+1} donne alors $(z_1, \dots, z_{k+1}) = \lambda(|z_1|, \dots, |z_{k+1}|)$.

Ce raisonnement se généralise au cas où au moins un des z_i est nul.

Supposons maintenant que tous les z_i sont non nuls.

L'inégalité triangulaire donne

$$|z_1 + \dots + z_k + z_{k+1}| \leq |z_1 + \dots + z_k| + |z_{k+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_k| + |z_{k+1}|.$$

Ces trois nombres sont donc égaux, ce qui donne en particulier

$$|z_1 + \dots + z_k| + |z_{k+1}| = |z_1| + \dots + |z_k| + |z_{k+1}| \quad \text{donc} \quad |z_1 + \dots + z_k| = |z_1| + \dots + |z_k|.$$

L'hypothèse J_k permet d'en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(z_1, \dots, z_k) = \lambda(|z_1|, \dots, |z_k|)$.

On peut aussi organiser l'inégalité triangulaire sous la forme

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_{k+1}| \leq |z_1| + |z_2 + \dots + z_{k+1}| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_{k+1}|$$

et en déduire l'égalité $|z_2 + \dots + z_{k+1}| = |z_2| + \dots + |z_{k+1}|$. L'hypothèse J_k permet d'en déduire qu'il existe un $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $(z_2, \dots, z_{k+1}) = \mu(|z_2|, \dots, |z_{k+1}|)$.

Le fait que z_2 soit non nul donne $\lambda = z_2/|z_2| = \mu$ donc finalement $(z_1, \dots, z_{k+1}) = \lambda(|z_1|, \dots, |z_{k+1}|)$.

L'énoncé J_{k+1} est prouvé. Par récurrence, l'énoncé J_k est vrai pour tout entier $k \geq 2$.

Question 14. Le produit tAx s'écrit de deux manières

$${}^tAx = {}^t\lambda x = \lambda {}^tx \quad \text{et} \quad {}^tAx = {}^t(Ay)x = {}^t(\mu y)x = \mu {}^tx.$$

On en tire l'égalité $(\lambda - \mu) {}^tx = 0$ puis ${}^tx = 0$ car $\lambda \neq \mu$. On remarque enfin l'égalité ${}^tx = {}^txy$, qui donne finalement $\boxed{{}^txy = 0.}$

Question 15.a. La récurrence est déjà initialisée par l'hypothèse $Aw \geq \mu w$.

Remarquons pour plus tard que le produit de deux matrices positives est une matrice positive. Idem avec une somme.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k w \geq \mu^k w$. La colonne $A^k w - \mu^k w$ est positive et la matrice A est positive donc la colonne $A^{k+1} w - \mu^k Aw$ est positive. De même, la colonne $\mu^k (Aw - \mu w)$ est positive.

Par somme, la colonne $A^{k+1} w - \mu^{k+1} w$ est positive, ce qui donne $A^{k+1} w \geq \mu^{k+1} w$.

Par récurrence, l'inégalité $A^k w \geq \mu^k w$ est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Les vecteurs en présence sont à coefficients positifs. On en déduit l'inégalité $\|A^k w\|_1 \geq \mu^k \|w\|_1$ puis

$$\frac{\|A^k w\|_1}{\|w\|_1} \geq \mu^k \quad \text{puis} \quad \|A^k\| \geq \mu^k \quad \text{et} \quad \|A^k\|^{1/k} \geq \mu,$$

ce qui donne $\boxed{\rho(A) \geq \mu}$ en faisant tendre k vers $+\infty$ (question 11).

Question 15.b. L'hypothèse $Aw > \mu w$ s'écrit

$$(Aw)_1 > \mu w_1 \quad \dots \quad (Aw)_n > \mu w_n.$$

Notons λ le plus petit des nombres $(Aw)_i/w_i$ où i décrit l'ensemble (non vide) des indices tels que $w_i > 0$. On a alors $Aw \geq \lambda w$ et $\lambda > \mu$.

Le résultat de la question précédente donne $\rho(A) \geq \lambda$ donc $\rho(A) > \mu$.

Question 15.c. Soit un indice ℓ distinct de k . Le calcul donne

$$(Aw')_\ell - \mu w'_\ell = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{\ell,j} w_j - \mu w_\ell}_{\geq 0} + \underbrace{a_{\ell,k} \varepsilon}_{> 0} > 0.$$

Il reste un coefficient de $Aw' - \mu w'$ à étudier

$$(Aw')_k - \mu w'_k = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{k,j} w_j - \mu w_k}_{\text{noté } x_k} - (\mu - a_{k,k}) \varepsilon.$$

Le nombre x_k vaut $(Aw)_k - w_k$. Il est donc strictement positif, ce qui permet de choisir $\varepsilon > 0$ de sorte que $x_k - (\mu - a_{k,k}) \varepsilon > 0$, comme précisé ci-dessous.

Si $\mu - a_{k,k} \leq 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = 1$.

Si $\mu - a_{k,k} > 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = x_k / (2(\mu - a_{k,k}))$.

Pour un tel choix de ε , on a alors $Aw' > \mu w'$ et w' est un vecteur positif non nul donc $\rho(A) > \mu$ d'après 15.b.

Question 16.a. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'égalité $(Ax)_i = \lambda x_i$ s'écrit

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

On applique l'inégalité triangulaire

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \geq |\lambda| \times |x_i| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} (v_0)_j \geq \rho(A) (v_0)_i.$$

C'est vrai pour tout indice i donc $Av_0 \geq \rho(A)v_0$.

Si on suppose que cette inégalité n'est pas une égalité alors on est dans le cadre des hypothèses de la question 15.c avec $\mu = \rho(A)$ et $w = v_0$ donc $\rho(A) > \rho(A)$, ce qui est absurde.

Cette absurdité prouve l'égalité $\boxed{Av_0 = \rho(A)v_0}$.

Question 16.b. Soit k un indice tel que $x_k \neq 0$. On obtient alors les relations

$$\rho(A) = \frac{(Av_0)_k}{(v_0)_k} = \frac{1}{|x_k|} \sum_{j=1}^n a_{k,j} |x_j| \geq a_{k,k} > 0.$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors

$$(v_0)_i = \frac{(Av_0)_i}{\rho(A)} = \frac{1}{\rho(A)} \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \geq \frac{1}{\rho(A)} a_{i,k} |x_k| > 0.$$

Toutes les coordonnées de v_0 sont strictement positives.

Question 16.c. L'inégalité triangulaire écrite à la question 16.a est finalement une égalité. En particulier, on a

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{1,j} x_j|.$$

Le cas d'égalité de la question 13 donne donc l'existence de $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$(a_{1,1}x_1, \dots, a_{1,n}x_n) = \mu(a_{1,1}|x_1|, \dots, a_{1,n}|x_n|).$$

Les $a_{1,j}$ étant tous non nuls, il vient

$$(x_1, \dots, x_n) = \mu(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Ainsi, le vecteur x est colinéaire à v_0 . Ces vecteurs sont donc associés à la même valeur propre. Cela prouve l'égalité $\lambda = \rho(A)$.

Question 17.a. Soit $x \in F$. Le calcul donne

$${}^t(Ax)w_0 = {}^t_x {}^tAw_0 = \rho(A) {}^t_x w_0 = 0$$

donc Ax appartient à F . Le sous-espace F est donc stable par φ_A .

Un autre calcul donne ${}^t v_0 w_0 = \sum_{i=1}^n (v_0)_i (w_0)_i > 0$ donc v_0 n'est pas dans F . La droite $\mathbb{C}v_0$ et F sont donc en somme directe.

Le sous-espace F est le noyau de $\varphi : x \mapsto {}^t_x w_0$, application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$. Ce n'est pas l'application nulle donc son rang vaut au moins 1 ; son image est incluse dans $\mathbb{C}$ et de dimension au moins 1 donc son image est $\mathbb{C}$. La formule du rang donne donc $\dim(F) = n - 1$.

On en déduit l'égalité $\dim(F) + \dim(\mathbb{C}v_0) = \dim(\mathbb{C}^n)$. La somme de F et $\mathbb{C}v_0$ étant directe, on en déduit que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

Question 17.b. Soit μ une valeur propre de A telle que $\mu \neq \rho(A)$. Soit v un vecteur propre associé.

Le résultat de la question 14 donne ${}^t v w_0 = 0$ donc $v \in F$.

Supposons que v ait tous ses coefficients réels et positifs (l'un d'entre eux au moins est alors strictement positif). On obtient alors ${}^t v w_0 > 0$, ce qui est contradictoire.

Un tel vecteur propre ne peut donc être associé qu'à la valeur propre $\rho(A)$: l'énoncé (iii) est démontré.

Question 18.a. Soit $(v_2, \dots, v_n)$ une base de F . La famille $\mathcal{V} = (v_0, v_2, \dots, v_n)$ est alors une base de $\mathbb{C}^n$ car $\mathbb{C}v_0$ et F sont supplémentaires. La matrice de φ_A relativement à cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où B est la matrice de ψ relativement à la base $(v_2, \dots, v_n)$ de F , d'où la factorisation $\chi_A = (X - \rho(A))\chi_\psi$.

Aucun élément de F n'est à coordonnées strictement positives donc $\rho(A)$ n'est pas une valeur propre de ψ . Or les autres valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à $\rho(A)$ donc les racines de χ_ψ ont un module strictement inférieur à $\rho(A)$.

On en déduit que $\rho(A)$ est une racine de multiplicité 1 de χ_A .

On connaît l'encadrement $1 \leq \dim(\text{Ker}(A - \rho(A)I_n)) \leq \text{mult}(\rho(A), A) = 1$. On en déduit que l'espace propre de A relatif à la valeur propre $\rho(A)$ est de dimension 1 : c'est la droite dirigée par v_0 .

Question 18.b. Le raisonnement de la question précédente donne $\rho(\psi) < \rho(A)$ donc $\rho(\psi/\rho(A)) < 1$ en exploitant 7.i.

Le résultat de la question 9 permet d'en déduire que la suite de terme général $(\psi/\rho(A))^k$ converge vers l'endomorphisme nul de F .

Soit $x \in F$. L'application linéaire $f \mapsto f(x)$, définie de $\mathcal{L}(F)$ vers F , est continue donc la suite de vecteurs de terme général $(\psi/\rho(A))^k(x)$ converge vers le vecteur nul de F .

En d'autres termes, la suite de vecteurs $(A^k x / \rho(A)^k)_{k \geq 1}$ converge vers le vecteur nul.

Question 18.c. Le vecteur x admet une décomposition (unique) sous la forme

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in F, \quad x_2 \in \mathbb{C}v_0.$$

Notons α le nombre complexe tel que $x_2 = \lambda v_0$. On obtient alors

$${}^t x w_0 = \underbrace{{}^t x_1 w_0}_{=0} + \lambda \underbrace{{}^t v_0 w_0}_{>0} \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le calcul donne

$$\frac{A^k x}{\rho(A)^k} = \frac{A^k x_1}{\rho(A)^k} + \frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} v_0.$$

Quand k tend vers $+\infty$, on obtient pour limite le vecteur $\frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} v_0$, qui est le projeté de x sur $\mathbb{C}v_0$ parallèlement à F .

Le fait que x soit positif et non nul donne $\frac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} > 0$, ce qui achève de démontrer (iv).